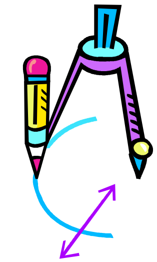
INIZIARE DAGLI ORIGAMI
PER ESPLORARE COSTRUZIONI GEOMETRICHE
E INTUIRE RELAZIONI ALGEBRICHE

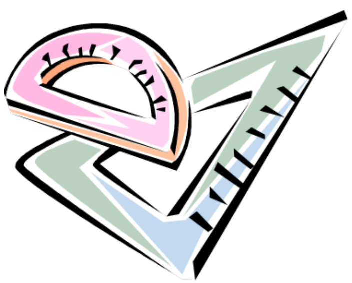
prof. Angela Balestra e prof. Giuliana Gnani
Mathesis

7 Marzo 2019

Dipartimento di matematica e informatica,
Università di Ferrara



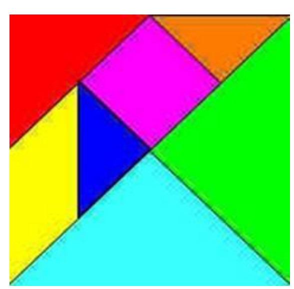
La conoscenza deve cominciare attraverso i sensi: perché dunque iniziare con un'esposizione verbale delle cose e non con un'osservazione reale di queste cose? (J. Comenius)



La mente non è un vaso da riempire.

È un fuoco da accendere.

(Plutarco)

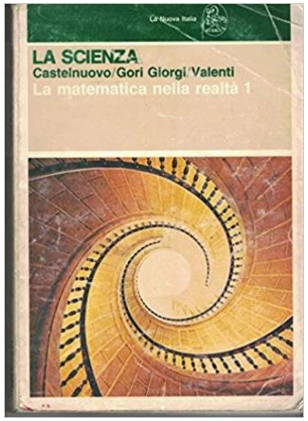


Testi

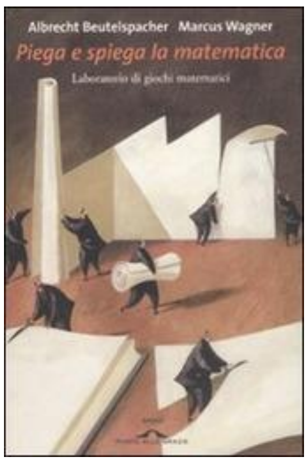
M.Perona, E. Pellizzari, D. Lucangeli, *Geometria con la carta - Volume 1,Piegare per spiegare - Riconoscere le forme,* Centro Studi Erickson ,Trento,2010

M.Perona, E. Pellizzari, D. Lucangeli, *Geometria con la carta - Volume 2,Piegare per spiegare – Enti fondamentali della geometria,* Centro Studi Erickson ,Trento,2011

M.Perona, E. Pellizzari, D. Lucangeli, *Geometria con la carta - Volume 3,Piegare per spiegare - Triangoli e quadrilateri: proprietà e superfici,* Centro Studi Erickson, Trento,2013



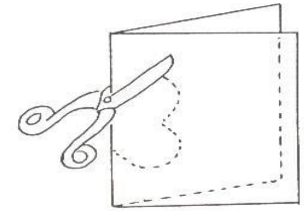
La scienza - la matematica nella realtà 1 –
di Castelnuovo ,Gori Giorgi ,Valenti
Firenze,La Nuova Italia,1990

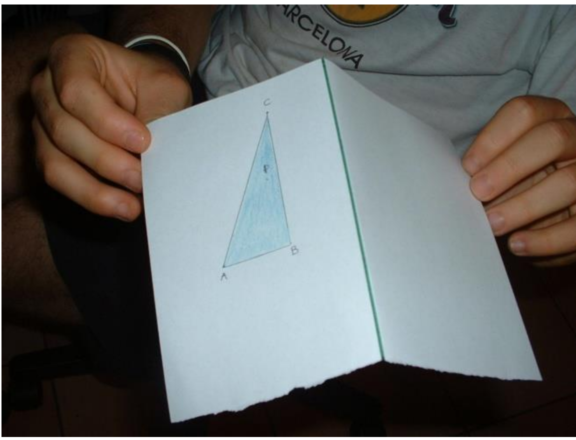


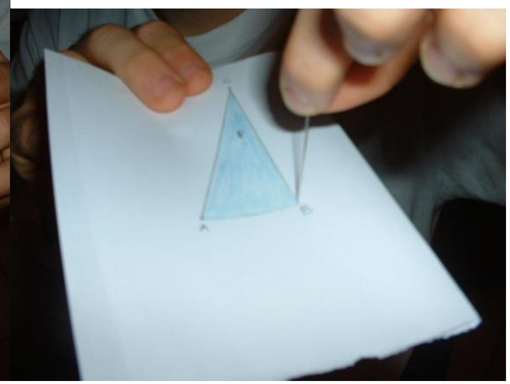
PIEGA E SPIEGA LA MATEMATICA
Laboratorio di giochi matematici
Albrecht Beutelspacher, Marcus Wagner
Traduzione di Umberto Gandini
Milano,Casa editrice Ponte delle Grazie, 2009

http://dm.unife.it/matematicainsieme

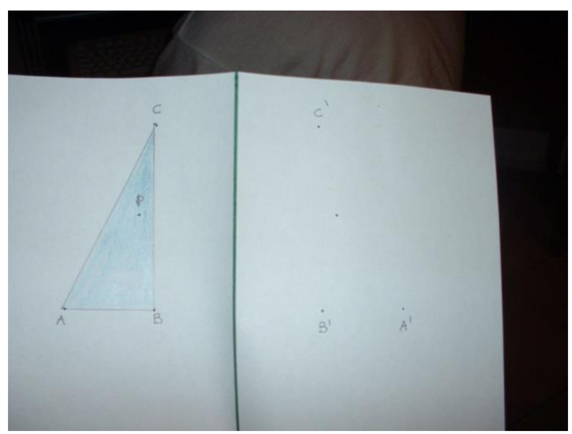
Operative Phase:
Cutting, Folding, Observing

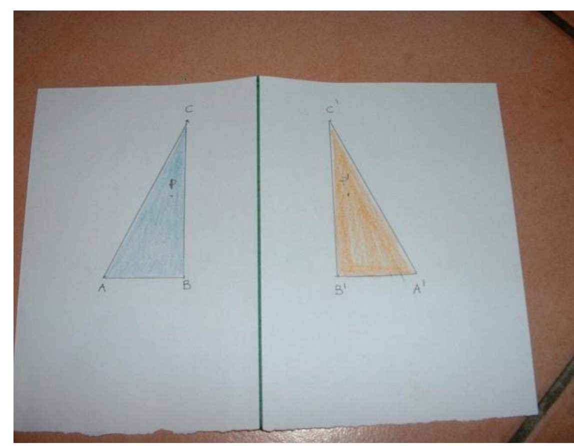




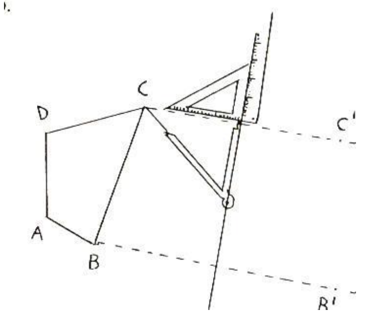


Constructing symmetric figures, in relation to an axis, with folding paper and a pin

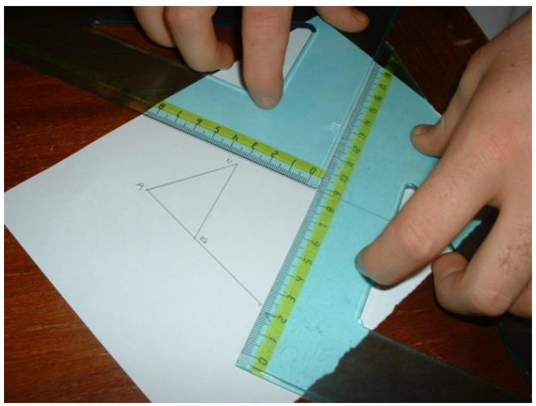


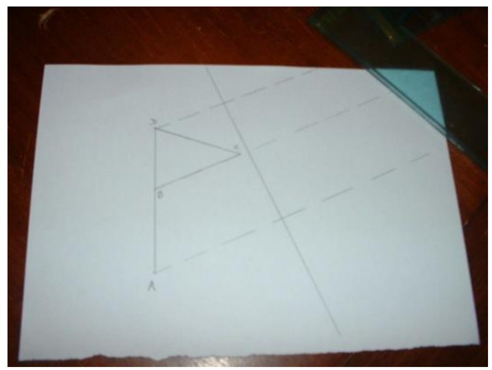


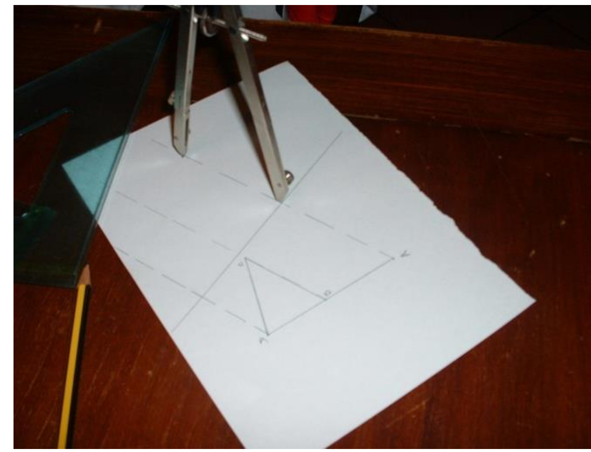
Operative Phase



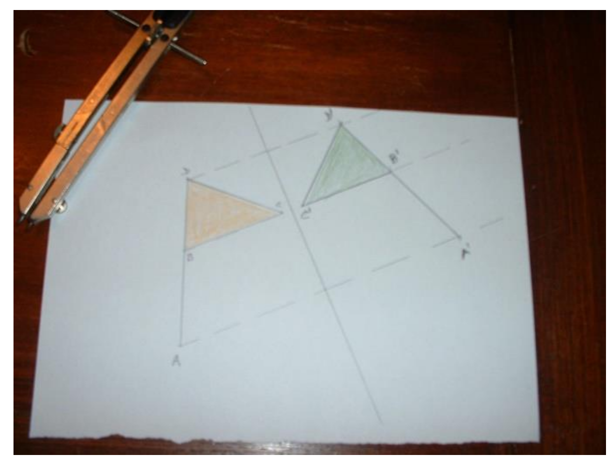
Drawing symmetric figures with a ruler and compass



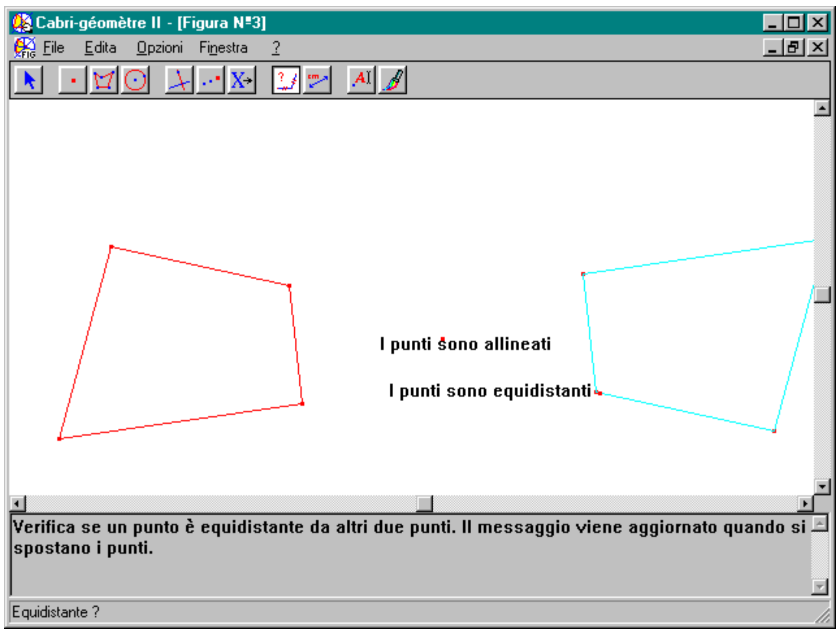


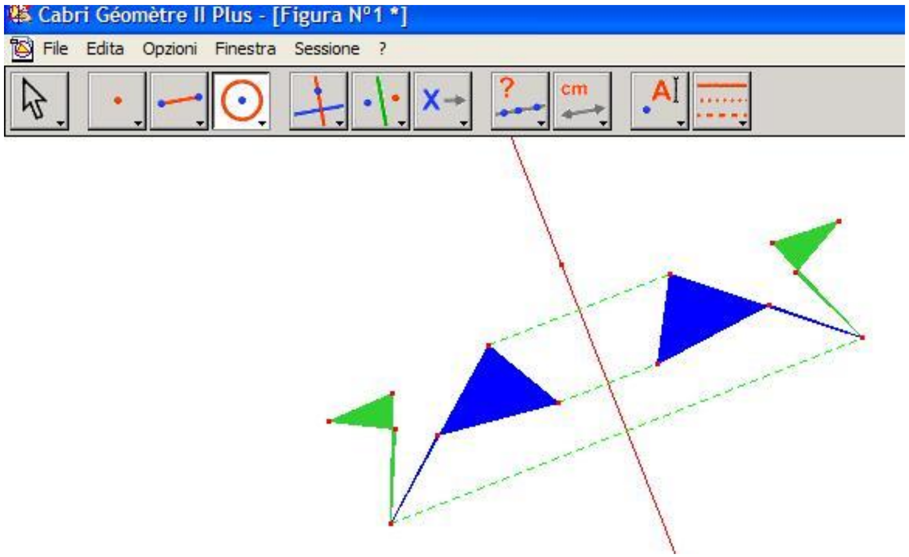


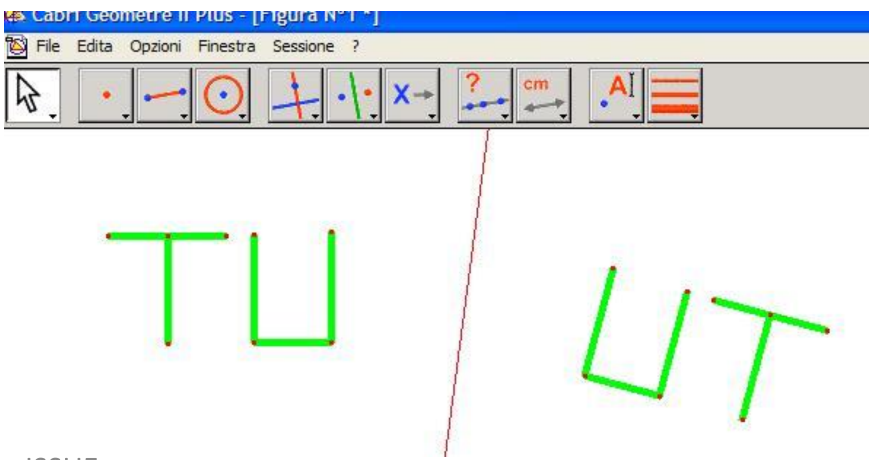
Given a figure F and an axis *r*, draw the figure F’ symmetric with F in relation to *r*



Observation, Analysis and Test with Software

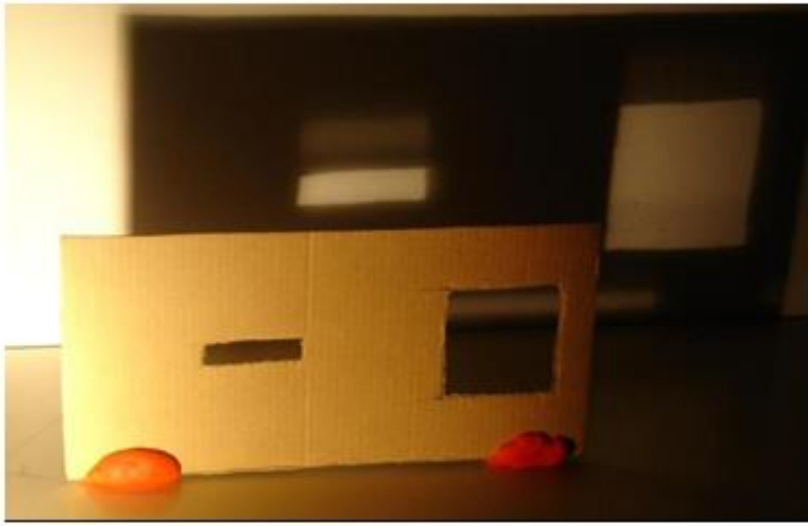


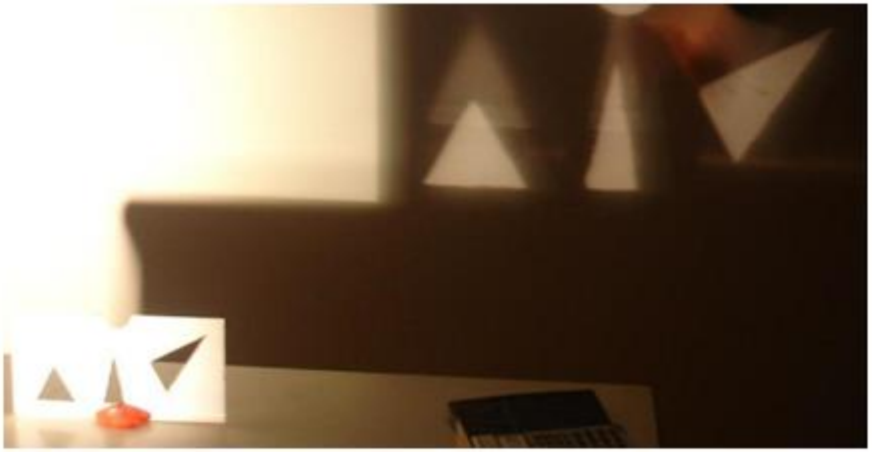




ALTRE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

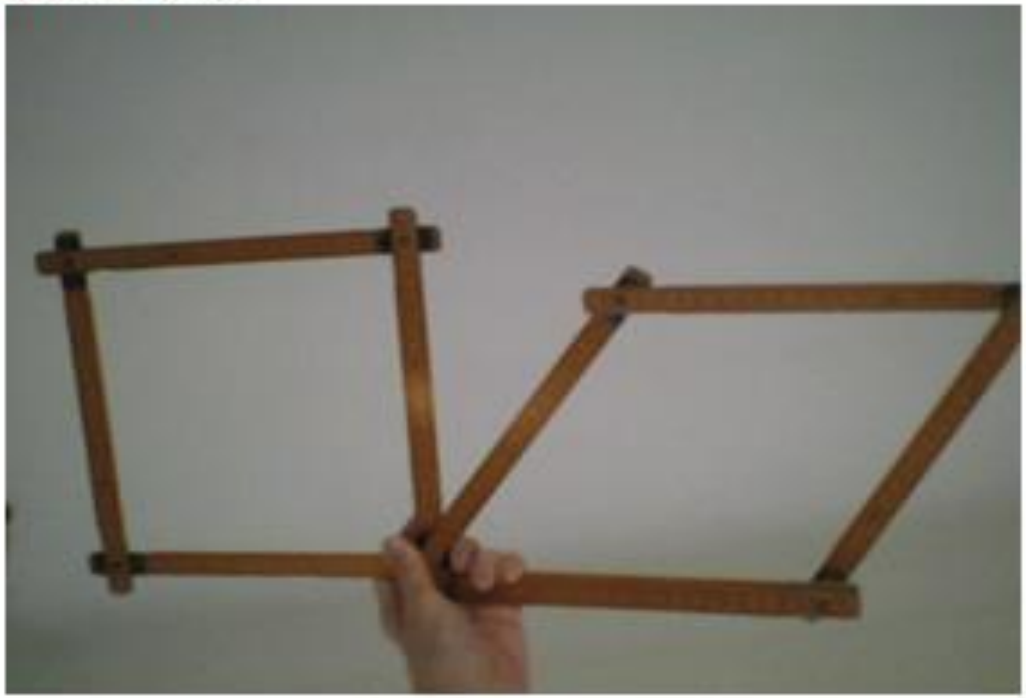
Geometria delle ombre





24

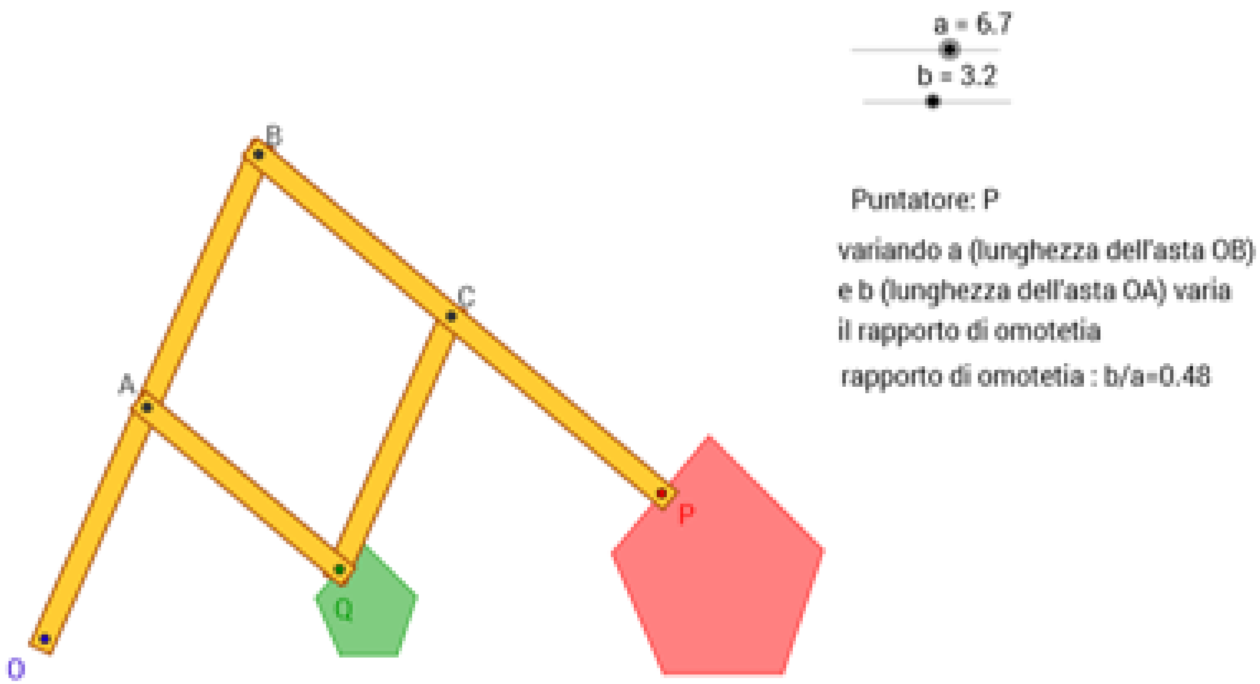
Emma Castelnuovo suggerisce l'uso di "materiale povero", come il *metro snodabile*, che permette di confrontare, ad esempio, diagonali, angoli, area di rombo e quadrato.



Giuliana Gnani,Isoperimetria ed equiestensione, 6 marzo 2013

27

DAL SITO DI MACCHINE MATEMATICHE



http://dm.unife.it/matematicainsieme/mate_intercultura/culture00.htm

LA PIEGATURA DELLA CARTA è in linea con l’esigenza di un passaggio graduale da una fase intuitiva e sperimentale alla formalizzazione; inoltre si traduce in una prassi didattica adeguata con uso di metodologie efficaci, la creazione di materiali, esercizi, prove e strumenti (anche Cabri e Geogebra) opportunamente integrati e volti all’insegnamento-apprendimento della matematica e delle scienze.

Perché insegnare la geometria attraverso la piegatura della carta?

- ✓ *Visione costruttiva e dinamica della geometria*
- ✓ *Geometria come scoperta e studio delle proprietà delle figure*
- ✓ *Collegamenti con l'algebra*
- ✓ *Collegamenti con altri ambiti disciplinari: chimica, fisica, geologia, biologia, arte(collegamento con il percorso Simmetrie*

La trattazione è destinata ai docenti e privilegia gli aspetti e le considerazioni rivolte all'insegnamento e alla prassi didattica

Le proposte didattiche tendono inoltre alle prospettive indicate nel libro *International Handbook of Mathematics Education* (1996) per l' insegnamento della geometria:

1. interazione tra forme reali e spazio
2. forme e spazio come elementi fondamentali per la costruzione di una teoria
3. forme e rappresentazione visuale come basi per un miglior comprensione di concetti, processi e fenomeni in varie aree di matematica e scienze (*pp 161)*

Si realizza in un **contesto costruttivista** un approccio all'insegnamento-apprendimento integrato di Matematica e Scienze, con particolare attenzione alla creazione di ricchi ambienti di apprendimento e all'uso di specifiche strategie di insegnamento, nella convinzione che per migliorare la comprensione della Matematica e delle Scienze «*knowledge cannot be transmitted but must be constructed by the mental activity of learners underpins contemporary perspectives in science education*» *(Driver et alii, 1994).*

Le attività in particolare permettono di rispettare alcuni principi basilari della didattica e quindi possono favorire i processi di apprendimento in quanto negli allievi determinano partecipazione, immersione, inclusione permettendo:

- ✓ gradualità dei concetti per facilitare l’apprendimento mediante frazionamento degli obiettivi didattici;
- ✓ l’utilizzo di modalità di insegnamento coinvolgenti e rassicuranti attraverso la presentazione di specifiche situazioni;
- ✓ l’appropriarsi di concetti a partire dalla soluzione di problemi concreti

VERSO LE DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

- ✓ *Manipolare, esplorare, congetturare, verificare, descrivere e argomentare* per favorire il passaggio dal concreto, alla sua rappresentazione iconica e simbolica.
- ✓ *Cercare le parole <per dirlo>.*

Accogliere i diversi modi per comprendersi favorisce un clima sereno e collaborativo che permette di scoprire i limiti e le contraddizioni del linguaggio comune, i vantaggi e le potenzialità del linguaggio formale.

- ✓ *Giocare* senza trascurare di far cogliere l'aspetto matematico che si cela dietro le strategie vincenti .
- ✓ *Avvalersi della storia della matematica* per far comprendere che la conoscenza è un patrimonio di tutti e gli oggetti matematici hanno radici lontane nel tempo e nello spazio
- ✓ *Ricorso continuo al tutoraggio*

ALCUNE SEMPLICI ESPERIENZE GEOMETRICHE CON LA PIEGATURA DELLA CARTA

Si utilizza la piegatura della carta (origami) per esplorare costruzioni geometriche e proprietà rilevanti relative a figure piane come triangoli e quadrilateri notevoli e intuire relazioni algebriche.

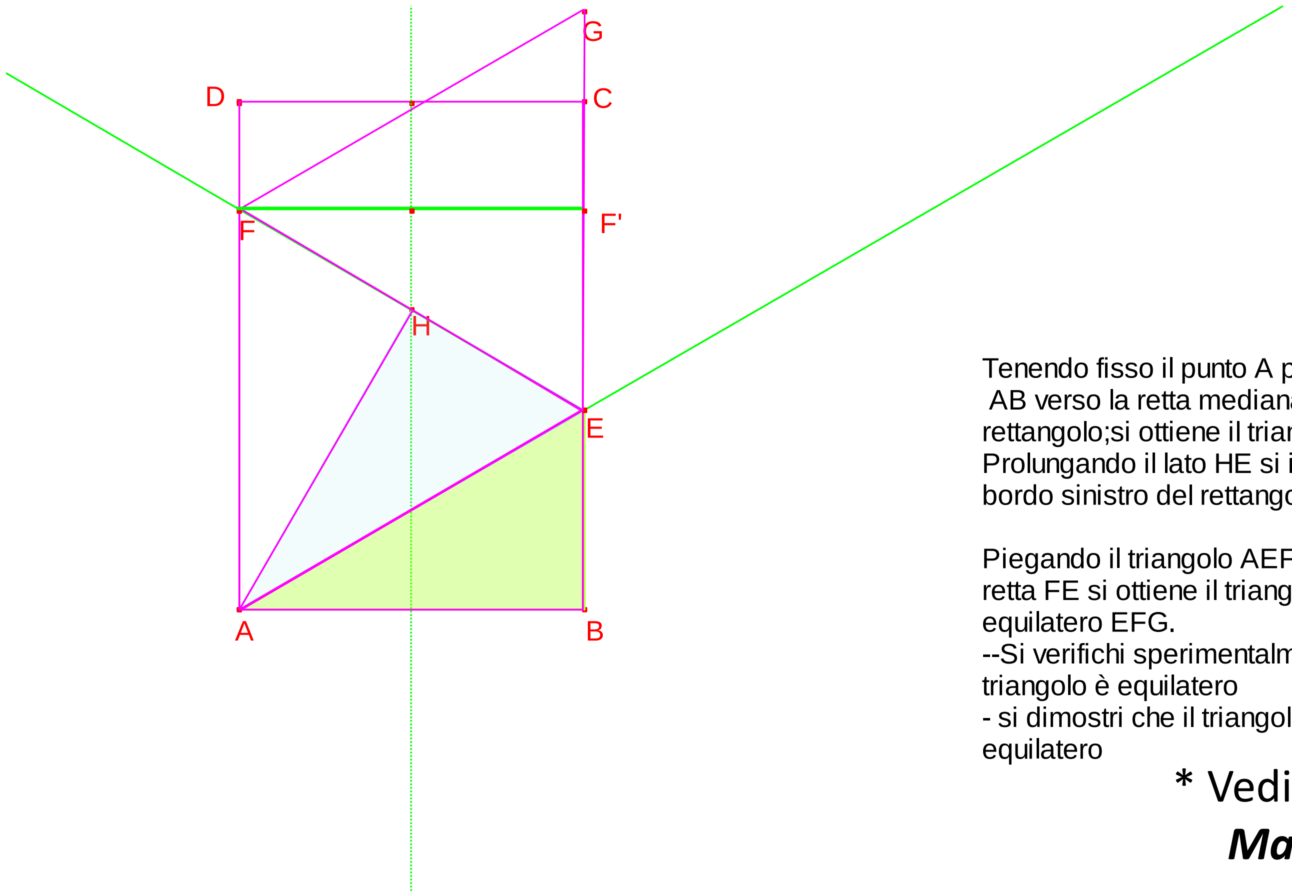
La conversazione di oggi offre la proposta di un approfondimento teorico e la creazione di attività e di materiali utilizzabili in classe.

Richiamiamo alcune costruzioni relative ai concetti di retta per due punti, rette incidenti, punto medio, angolo e bisezione, retta per un punto perpendicolare ad una retta data; costruzione di un triangolo e costruzione delle bisetrici(incentro),mediane(baricentro), assi(circocentro)per soffermarci sulla costruzione con la piegatura della carta del triangolo equilatero.

In primo luogo si procede alla verifica sperimentale e quindi alla dimostrazione che in effetti si è costruito un triangolo equilatero.

Si scoprono quindi le principali proprietà utilizzando la verifica quindi passiamo alla dimostrazione euclidea con riga e compasso.); vengono svolti inoltre alcuni temi notevoli quali l'uguaglianza, la scomponibilità , la simmetria assiale e centrale per triangoli

COSTRUZIONE DEL TRIANGOLO EQUILATERO PARTENDO DA UN RETTANGOLO*



Tenendo fisso il punto A piegare il lato AB verso la retta mediana del rettangolo;si ottiene il triangolo AEH. Prolungando il lato HE si individua sul bordo sinistro del rettangolo il punto F.

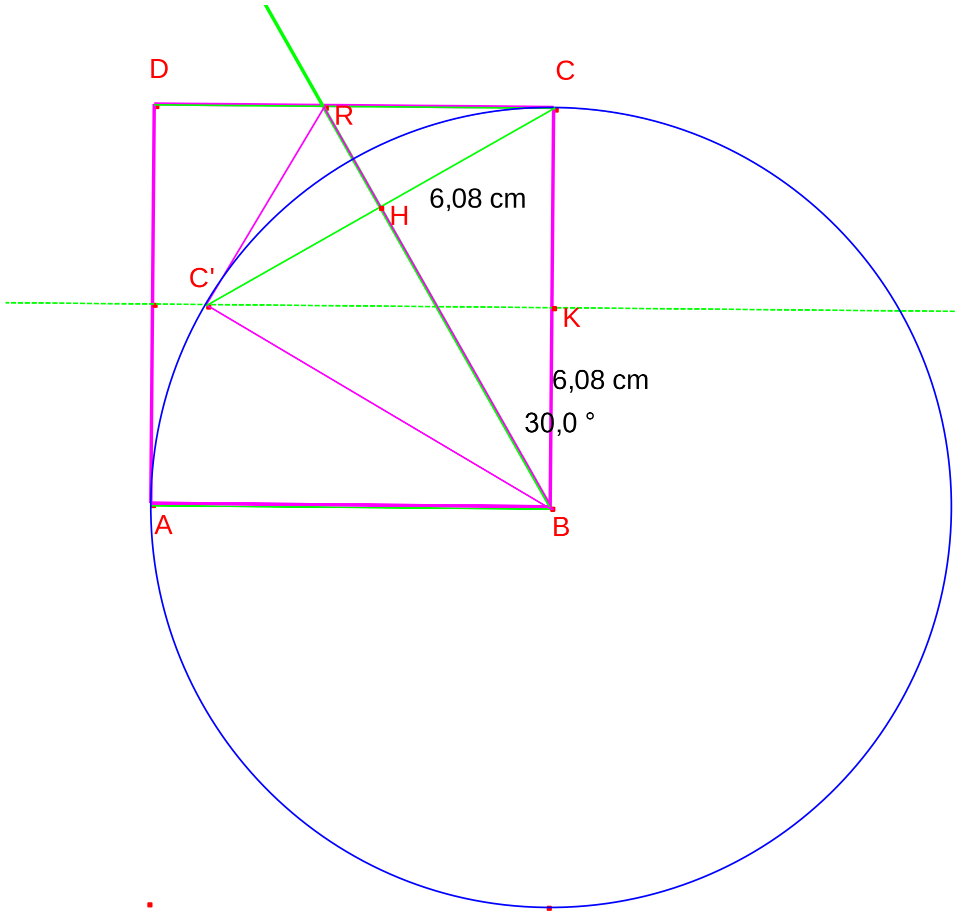
Piegando il triangolo AEF lungo la retta FE si ottiene il triangolo equilatero EFG.
--Si verifichi sperimentalmente che il triangolo è equilatero
- si dimostri che il triangolo è equilatero

* Vedi i percorsi didattici di ***Matematica insieme***

DIMOSTRAZIONE

- H è punto medio del lato EF essendo per il teorema di Talete H il corrispondente del punto medio del segmento FF’. Ne segue che AH oltre che altezza è anche mediana del triangolo AEF.
- Tale triangolo risulta perciò isoscele e la retta AH è bisettrice dell’angolo EAF.
- L’angolo in A retto è perciò trisecato dalle rette AH e AE: l’angolo EAF vale perciò 60° gradi . Ne consegue che il triangolo AEF è equiangolo quindi equilatero.

COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO EQUILATERO PARTENDO DA UN QUADRATO



DIMOSTRAZIONE

- Tesi: il triangolo C'CB è equilatero.

C'B è uguale a CB per costruzione,

inoltre C'C è uguale a C'B perchè C'K è mediana e altezza essendo C'K asse mediano del quadrato.

Ne consegue che l'angolo in B è trisecato e l'angolo RBA è di 60° . Procedendo in modo analogo tenendo fisso A si completa la costruzione del triangolo equilatero di lato AB.

<u>NOTA</u>: C' si ottiene con riga e compasso come intersezione tra l'asse mediano e la circonferenza di centro B e raggio BC.

R è punto della bisettrice dell'angolo C'BC: infatti è equidistante dai lati dell'angolo

OSSERVAZIONE SUI CONCETTI DI ISOMETRIA E DI CONGRUENZA

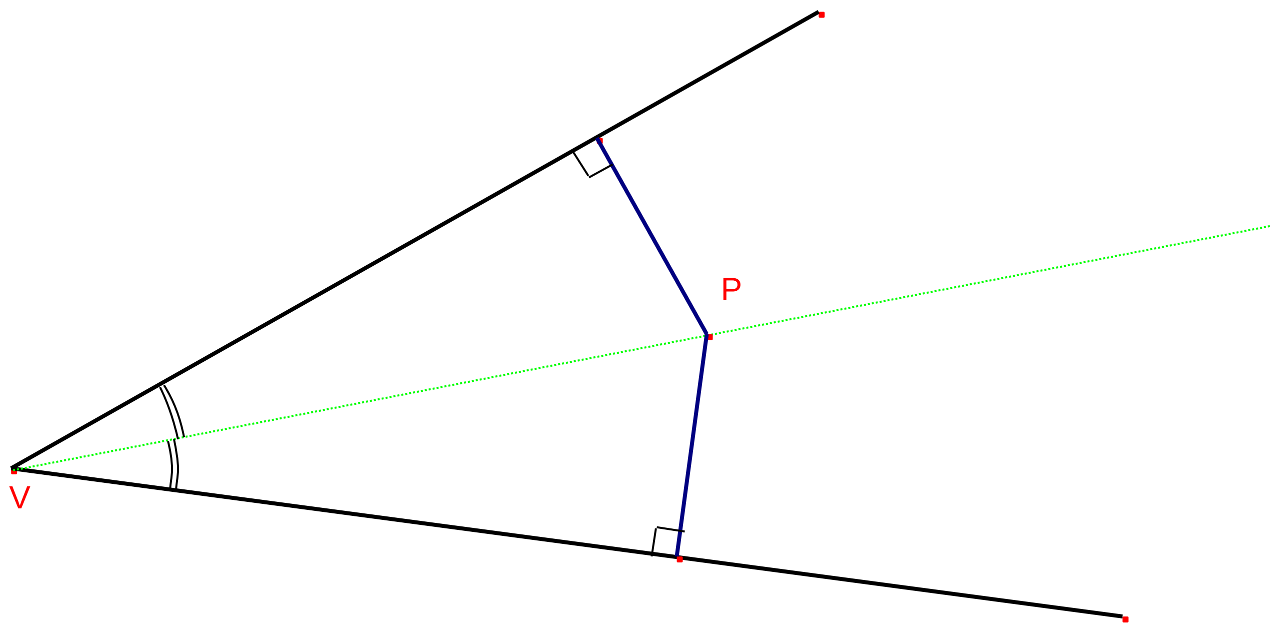
Notiamo che

- da una parte l'approccio euclideo utilizza il concetto intuitivo di movimento rigido, dall'altro l'approccio dinamico tramite le trasformazioni utilizza il concetto di isometria.

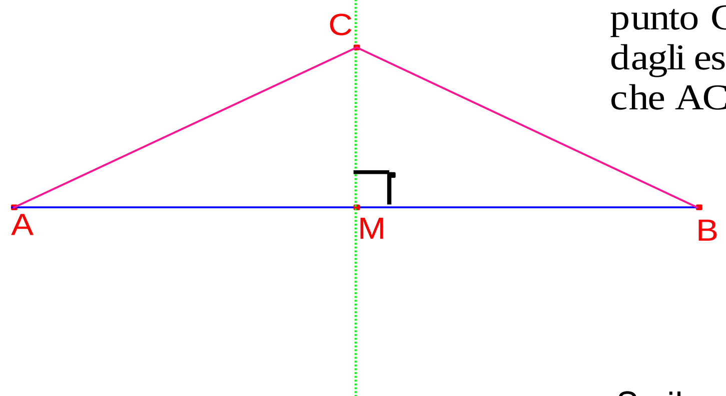
- i concetti e i termini di congruenza e di isometria sono spesso confusi, per cui conviene allora sottolineare il fatto che la congruenza tra figure è una relazione di equivalenza, mentre l'isometria è una funzione del piano che induce una relazione di equivalenza

CARTA, RIGA E COMPASSO O SOFTWARE ?

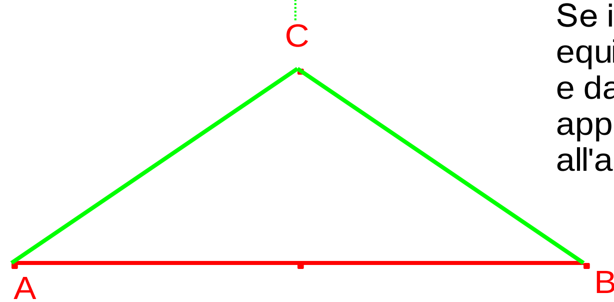
La bisettrice di un angolo come luogo geometrico



ASSE DI UN SEGMENTO COME LUOGO GEOMETRICO



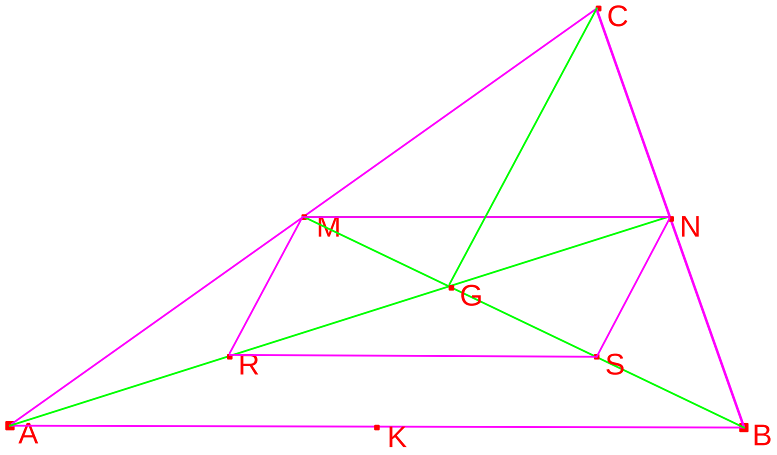
Se il punto C appartiene all'asse, si dimostra che il punto C è equidistante dagli estremi A e B, ovvero che AC = CB



Se il punto C è equidistante da A e da B allora appartiene all'asse di AB

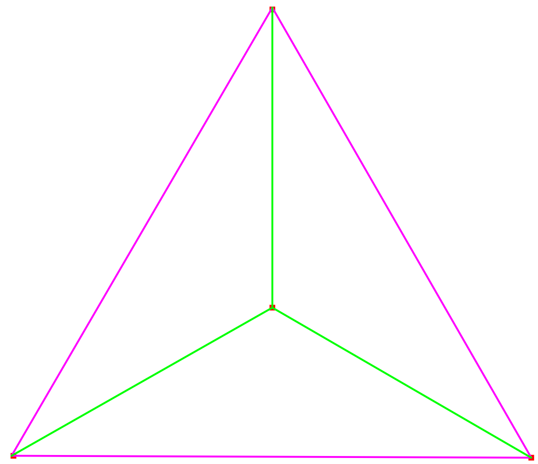
NB: in un triangolo isoscele la mediana coincide con la bisettrice dell’angolo in C ed con l’altezza relativa alla base AB

BARICENTRO



G è il baricentro del triangolo:viene anche chiamato centro di gravità;si dimostra che G suddivide le mediane in due parti di cui quella contenente il verice è doppia dell'altra

PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO EQUILATERO: VERIFICHE E COSTRUZIONI EUCLIDEE



Dipartimento di matematica e informatica,
Università di Ferrara

SIMMETRIA PER ROTAZIONE (RADIALE O RAGGIATA)

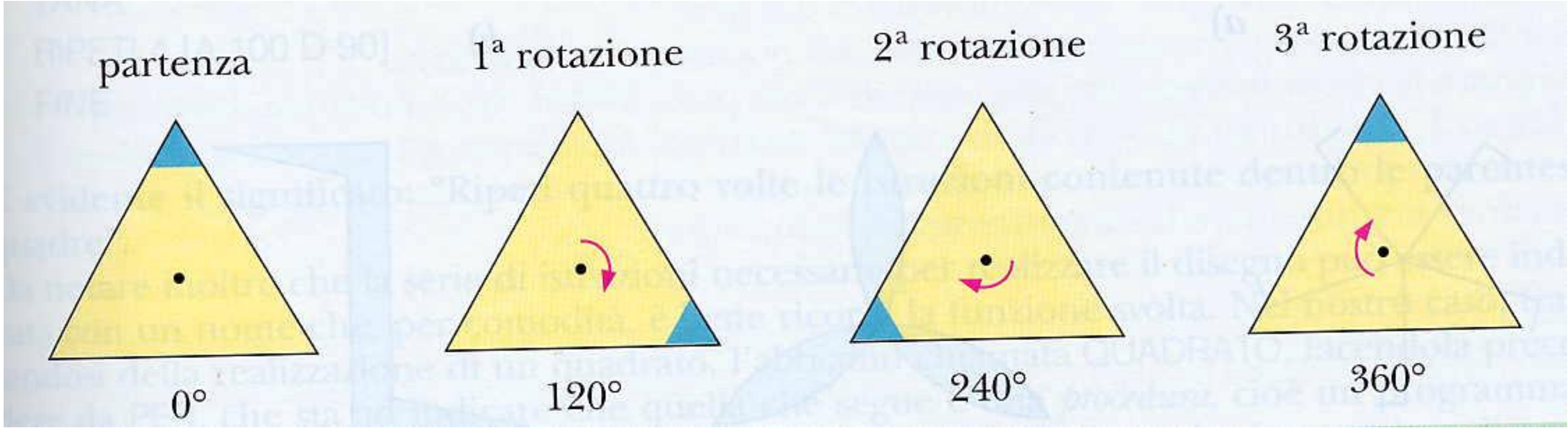
Si dice che una figura piana presenta una *simmetria per rotazione (o radiale) di ordine n*, con n numero naturale non nullo, se, fissato l'angolo a pari a 360°/n, esiste un punto O tale che la rotazione di centro O e angolo a trasforma la figura in sé. Tale punto prende il nome di *centro di rotazione della simmetria radiale*.

Esempi

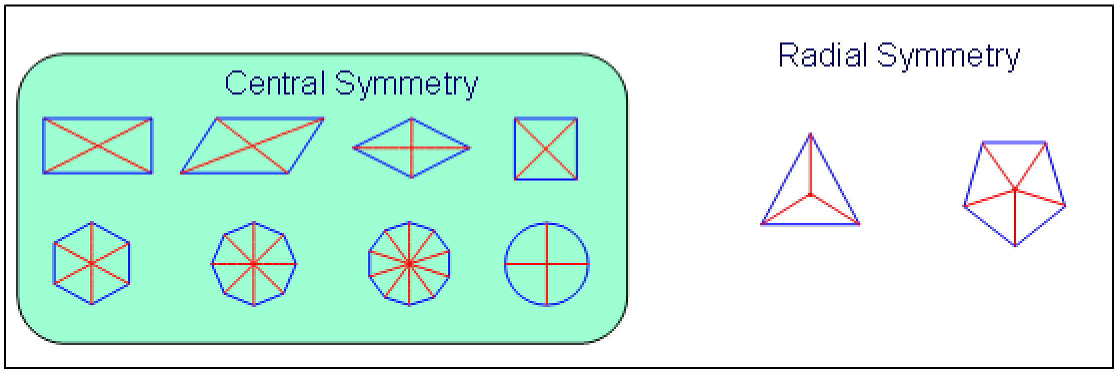
Se consideriamo un triangolo equilatero e un quadrato scopriamo in entrambi la presenza di assi di simmetria che si intersecano in un sol punto. Tale punto per il quadrato è anche centro di simmetria , per il triangolo non è centro di simmetria, ma svolge comunque un ruolo di "regolarità" come centro di una *simmetria radiale*.

Si può notare che per il triangolo equilatero si presenta una simmetria radiale di ordine 3 e che la rotazione di centro O e angolo 120° riporta la figura su se stessa ma non punto per punto.

Applicando la stessa rotazione successivamente 3 volte la figura viene riportata su se stessa punto per punto



- Si nota che se una figura ha un centro di simmetria O (ad esempio un parallelogramma), allora O è anche centro di rotazione. Esistono figure, come i poligoni regolari con un numero dispari di lati, che hanno una simmetria per rotazione ma non una simmetria centrale.
  La figura seguente chiarisce questi concetti



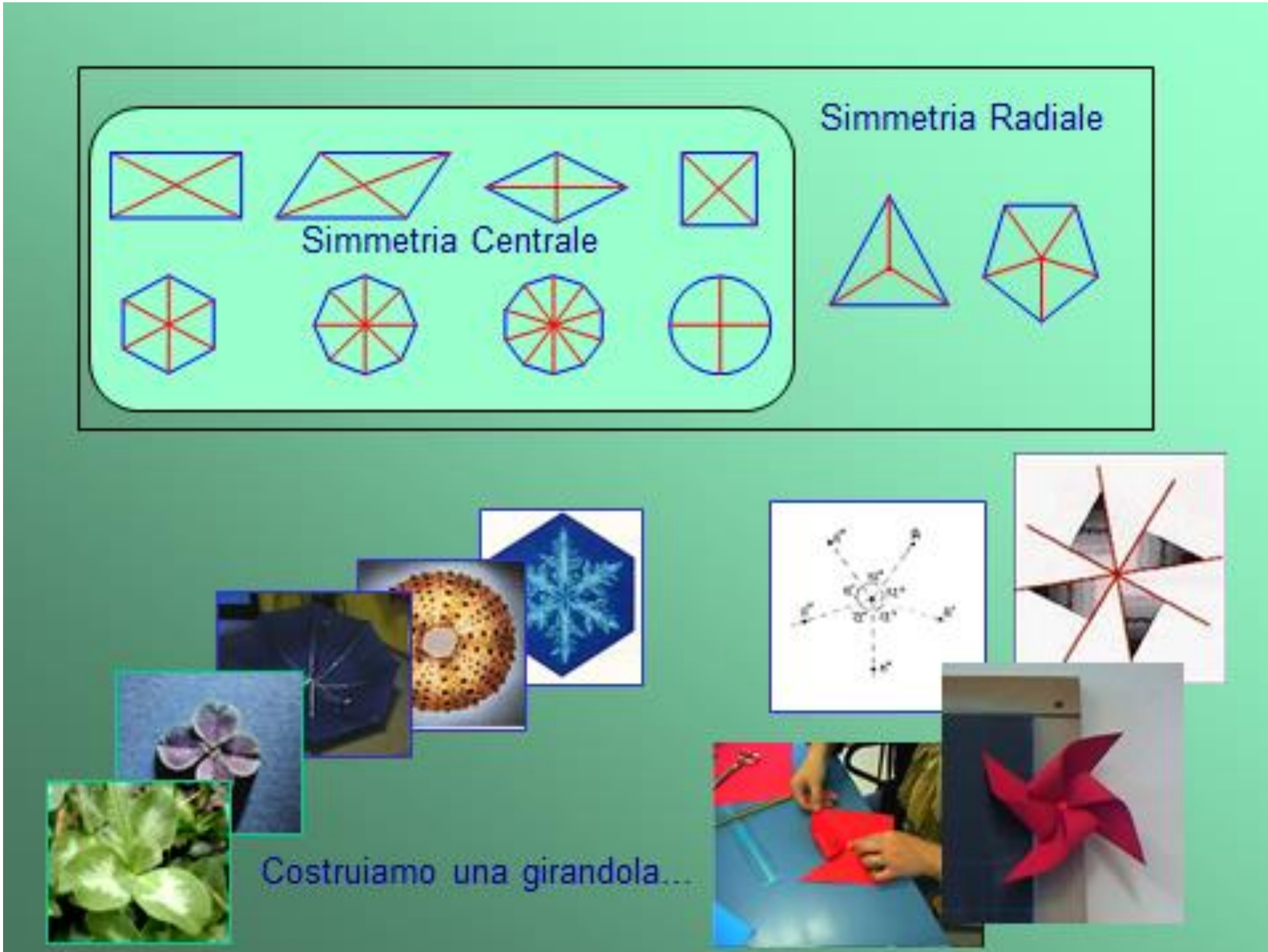
- Il concetto di simmetria di rotazione ha anche ulteriori interessanti sviluppi in ambito matematico perché legato allo studio algebrico dei gruppi, che trova ampie applicazioni alla cristallografia.
  Sono rilevanti anche i legami con le scienze naturali poiché si può constatare che vi sono esseri viventi che presentano una forma di simmetria radiata. Vi sono interessanti studi che collegano la forma con l'ambiente.

Il concetto di simmetria di rotazione ha anche ulteriori interessanti sviluppi in ambito matematico perché legato allo studio algebrico dei gruppi, che trova ampie applicazioni alla cristallografia.
Sono rilevanti anche i legami con le scienze naturali poiché si può constatare che vi sono esseri viventi che presentano una forma di simmetria radiata. Vi sono interessanti studi che collegano la forma con l'ambiente.

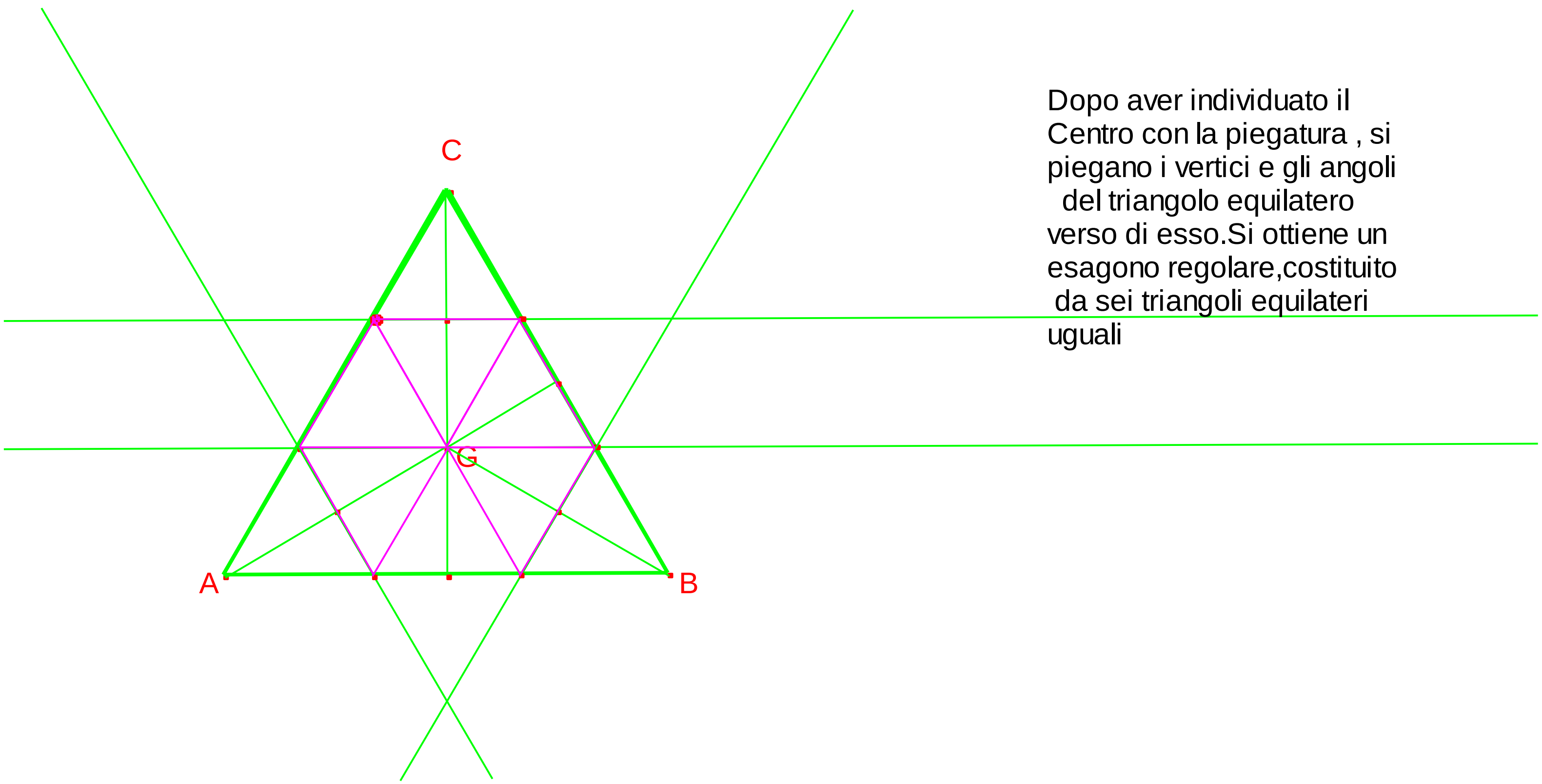


Per esigenze di completezza, proponiamo agli insegnanti un approfondimento delle tematiche di Scienze connesse con il percorso didattico sulle simmetrie.

Indice


Simmetria Radiale
Simmetria Centrale
Costruiamo una girandola...

DAL TRIANGOLO EQUILATERO ALL'ESAGONO

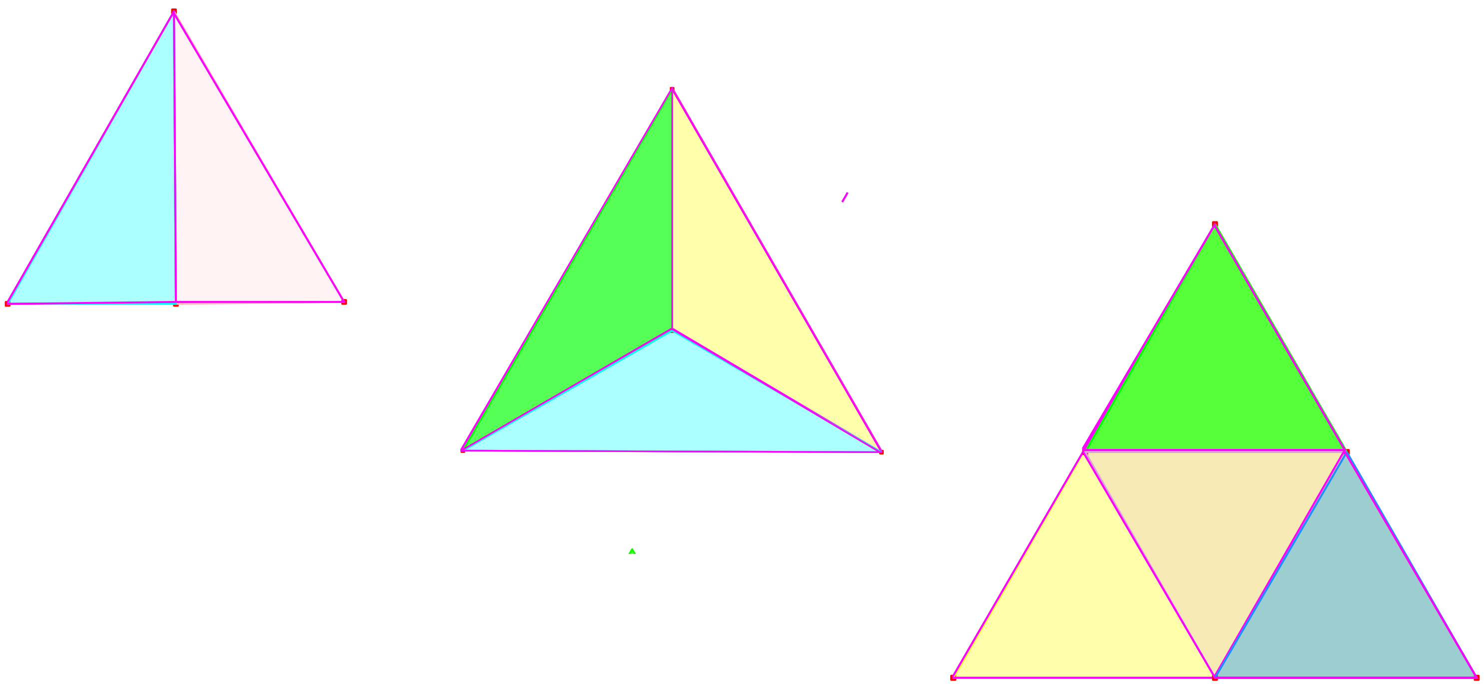


Dopo aver individuato il Centro con la piegatura , si piegano i vertici e gli angoli del triangolo equilatero verso di esso.Si ottiene un esagono regolare,costituito da sei triangoli equilateri uguali

SIMMETRIE DELL’ESAGONO REGOLARE

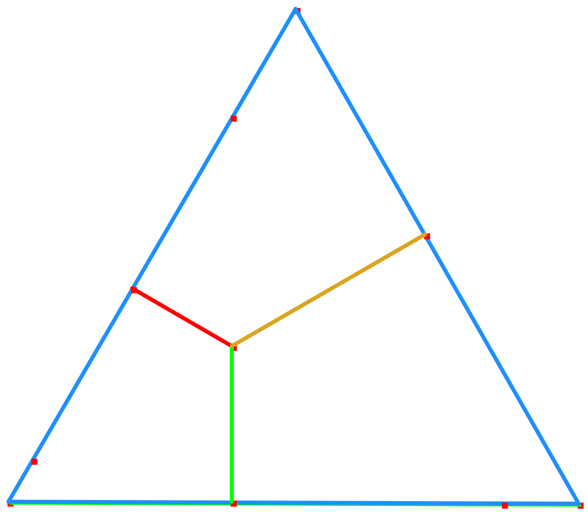
- Il triangolo equilatero ammette tre assi di simmetrie(mediane) e un centro di simmetria radiale con rotazioni di 120°,240°,360°:non ammette centro di simmetria.
- L’esagono regolare presenta sei assi di simmetria: precisamente le diagonali di angoli opposti e le rette che congiungono i punti medi dei lati opposti. Il centro è punto di simmetria centrale e centro di rotazione con angoli di 60°,120°,180°,240°,300° e 360°.

SCOMPOSIZIONE DEL TRIANGOLO EQUILATERO IN TRIANGOLI UGUALI



TEOREMA DEL VIVIANI

In un triangolo equilatero la somma delle distanze di ogni punto interno dai lati è costante



DIMOSTRAZIONE

Si congiunga il punto con i vertici del triangolo: in tal modo il triangolo viene decomposto in tre triangolo disgiunti, Ne consegue che l'area del triangolo è la somma delle aree dei tre triangoli, cioè detti l e h la misura del lato e dell'altezza del triangolo equilatero e q, k, p le misure delle altezze dei singoli triangoli vale

$\frac{1}{2}\, l(q+k+p)=\frac{1}{2}\, l\, h$

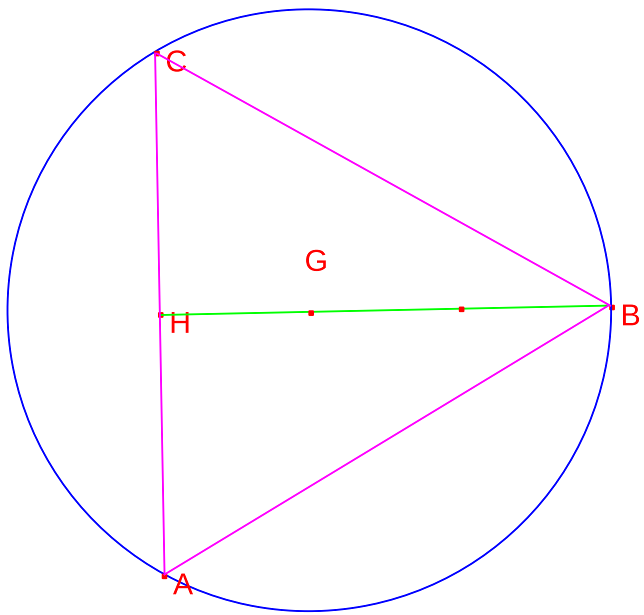
Si ottiene che la somma delle distanze dai lati vale h qualunque sia il punto considerato.

Vale l'inverso del teorema, cioè

Se in un triangolo la somma delle distanze di un qualunque punto dai lati è costante allora il triangolo è equilatero ?

COSTRUZIONE DEL TRIANGOLO EQUILATERO E DELL'ESAGONO REGOLARE INSCRITTI IN UNA CIRCONFERENZA

COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO EQUILATERO NOTA L'ALTEZZA



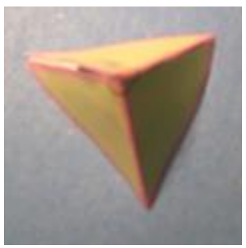
Si suddivide l'altezza HB in tre parti uguali utilizzando il teorema di Talete.Per la proprietà del baricentro si individua il punto G.Ricordando la costruzione del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza , si traccia la circonferenza di centro G e raggio GB.Si individuano gli altri vertici A e C come intersezione della circonferenza con la perpendicolare per H all'altezza HB.

COSTRUZIONE

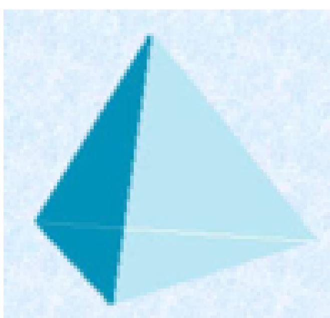
Si suddivide l'altezza HB in tre parti uguali utilizzando il teorema di Talete. Per la proprietà del baricentro si individua il punto G. Ricordando la costruzione del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza, si traccia la circonferenza di centro G e raggio GB. Si individuano gli altri vertici A e C come intersezione della circonferenza con la perpendicolare per H all'altezza HB

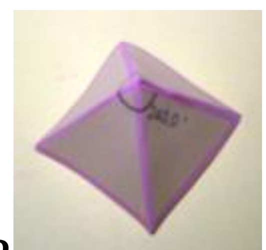
COSTRUIAMO I POLIEDRI

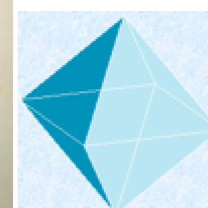
http://dm.unife.it/matematicainsieme/sitocristalli/perc_mate003a.htm



4 facce tetraedro regolare







8 facce ottaedro regolare

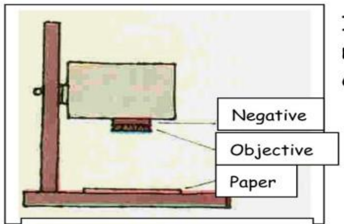
Altri strumenti

Altri strumenti ?

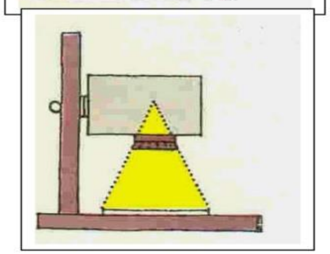
ALTRI STRUMENTI?

Ho capito che la costruzione di figure geometriche va fatta con un materiale, un qualcosa che si maneggia, che si fa e si disfa..

Emma Castelnuovo , 2008



In a photographic laboratory, in order to obtain a magnified image, starting from a negative, a device called a **magnifier** is used.

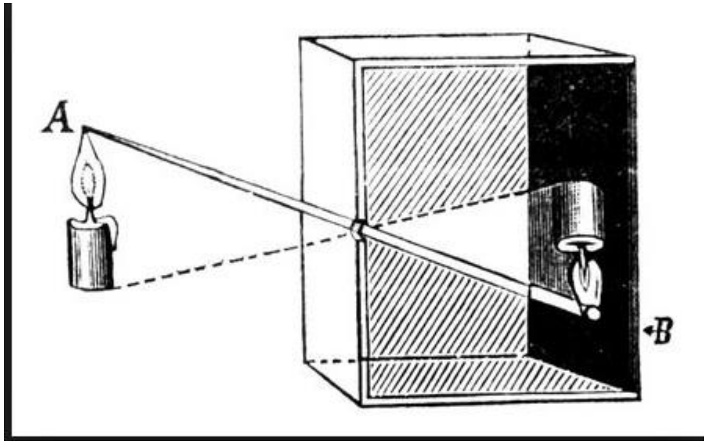


The magnifier projects the points of the «negative» on the photographic paper.
If the negative and the paper lie on parallel planes, a **magnification** is obtained.

Tratto da
Paola Sgarzi,Light and colours_exam_work
Issue project

figura realizzata
dalla prof.ssa Angela Balestra

CON IL MATERIALE



Associazione Macchine Matematiche

MENU PRINCIPALE

- Home
- Chi siamo
- Dove siamo
- Per contattarci
- Macchine nel mondo
- Web link
- Laboratorio Macchine Matematiche

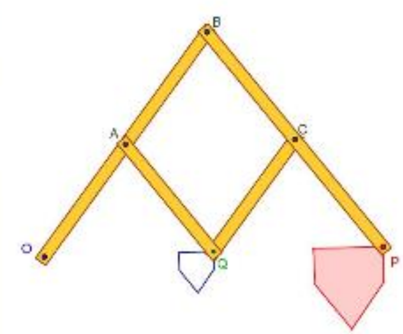
VISITE IN LABORATORIO

- Informazioni generali
- Coniche e conicografi
- Trasformazioni geometriche
- Prospettiva
- Trisezione

Omotetia: pantografo di Scheiner

Pagina 1 di 3

Indice



DAL SITO DI MACCHINE MATEMATICHE