

*Dai principi dell'idrostatica
alle leggi dell'idrodinamica.
Un percorso tra matematica e storia*

Una proposta didattica

Maria Giulia Lugaresi (Università di Ferrara)

Mathesis Ferrara

24 novembre 2021



**Dipartimento
di Matematica
e Informatica**



Matematica. Linee generali e competenze

*Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i **concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni**, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una **visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.***

[...]

*Importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di **comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura.***

Indicazioni Nazionali (Liceo Scientifico).

Fisica. Linee generali e competenze

*Lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: osservare e identificare fenomeni; formulare ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi; **formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione**; fare esperienza e rendere ragione del significato dei vari aspetti del metodo sperimentale*

*Lo studio della meccanica riguarderà **problemi relativi all'equilibrio** dei corpi e **dei fluidi**; i moti saranno affrontati innanzitutto dal punto di vista cinematico giungendo alla dinamica con una prima esposizione delle leggi di Newton, con particolare attenzione alla seconda legge (1° biennio).*

*L'approfondimento del **principio di conservazione dell'energia meccanica, applicato anche al moto dei fluidi** (2° biennio).*

Indicazioni Nazionali (Liceo Scientifico).

Destinatari: Primo biennio.

Materie coinvolte: Matematica, Fisica, Storia, Italiano, Latino (se previsto)

Tempi: 4/6 ore

Meccanica dei fluidi: Statica e Dinamica

Il concetto di fluido

Grandezze fisiche coinvolte e loro definizione: densità, pressione, portata, velocità

Statica dei fluidi (Idrostatica)

Legge di Stevino

Principio di Pascal

Principio di Archimede

Dinamica dei fluidi (Idrodinamica)

Equazione di continuità

Teorema di Bernoulli e sue applicazioni

Legge di Torricelli

Idraulica e Idrometria

Dispositivi per la misura della velocità:

Alcune proposte di fonti originali:

- Archimede, *Sui galleggianti* (Trattato delle cose che stanno sul liquido) – Principio di Archimede
- Vitruvio, *De Architectura*, libro IX – Archimede e il problema della corona
- Galileo, *La bilancetta* – Esperimento della corona di Archimede

- B. Castelli, *Dimostrazioni geometriche della misura dell'acque correnti* – Legge di conservazione della portata (legge di continuità)

Definizione di portata:

- B. Castelli, *Copia di lettera al Sig. Galileo Galilei*
- D. Guglielmini, *Misura delle acque correnti*
- D. Guglielmini, *Della natura dei fiumi*
- B. Zandrini, *Leggi e fenomeni, regolazioni ed usi delle acque correnti*

Legge dell'efflusso:

Torricelli, *Opera geometrica, De motu aquarum* (1644)

Fluido: definizione e proprietà

Definizione di **densità (assoluta)**:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Da cui si possono dedurre le definizioni di:

Densità relativa

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

Peso specifico

$$p_{spec} = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$

Pressione

$$p = \frac{F}{S}$$

Legge di Stevino (1586)

$$p = p_0 + \rho gh$$

Dove p_0 rappresenta il valore della pressione alla superficie libera di un liquido e p il valore alla profondità h .

Il termine ρgh prende il nome di **pressione idrostatica**.



Principio di Pascal

Una pressione esercitata in un punto di una massa fluida si trasmette in ogni altro punto e in tutte le direzioni con la stessa intensità.



Applicazioni del Principio di Pascal: torchio idraulico, freni idraulici delle automobili.

L'esperimento di Evangelista Torricelli per la misura della pressione atmosferica



<https://catalogo.museogalileo.it/approfondimento/EsperimentoTorricelli.html>
Esperimento di Torricelli (Mercurio)

<http://www.imss.fi.it/multi/torricel/le110644.html>
Lettera di Torricelli a Michelangelo Ricci, 11 giugno 1644

Principio di Archimede e sue conseguenze (lettura di alcune proposizioni del trattato *Sui galleggianti*)

Prop. 3. *Le grandezze solide, che avendo egual mole hanno egual gravità del liquido, poste nel liquido talmente s'immergono, che niente resta fuori della superficie del liquido, ma non però vanno a fondo.*

Prop. 4. *Delle grandezze solide, qualunque è più leggieri del liquido, nel liquido posta non tutta si immerge, ma una parte di essa sovrasterà alla superficie del liquido.*

Prop. 5. *Delle grandezze solide la più leggieri del liquido, posta nel liquido, fino a tanto vi si immerge, che tanta mole di liquido, quanto la parte sommersa, abbia la stessa gravità, che tutta la grandezza.*

Prop. 6. *Qualunque delle solide grandezze più leggieri del liquido, dentro al liquido spinta, si porta in su con tanta forza, quanto un liquido di mole eguale alla grandezza è più grave della stessa grandezza.*

Prop. 7. *Le grandezze solide più gravi del liquido, nel liquido poste, anderanno in giù finché possano scendere, e nel liquido saranno tanto più leggier, quanto è la gravità del liquido, che abbia mole eguale alla grandezza.*

«Origini» del Principio di Archimede

Resoconto di Vitruvio: Lettura di un estratto dal *De architectura* (in latino o in traduzione italiana), libro IX – Archimede e il problema della corona.

<https://www.e-rara.ch/oec/content/zoom/6154719>

Lettura e commento dell'opera *La bilancetta* di Galileo Galilei (opera giovanile, pubblicata postuma: Bologna, 1656).

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2500627>

Galileo intende dimostrare che Archimede avrebbe risolto l'inganno della corona non secondo la versione tramandata da Vitruvio, ma grazie ad un procedimento più raffinato. A questo scopo propone l'utilizzo di uno strumento, la «bilancetta», che consente di pesare i corpi direttamente nell'acqua, applicando il concetto archimedeo di peso specifico: le masse d'oro e d'argento, come la corona, pesate in aria si fanno equilibrio, ma nell'acqua rivelano le differenze esistenti; esse sono meno gravi che in aria in proporzione della relazione tra il loro peso specifico e quello dell'acqua.

Condizioni di galleggiamento nell'acqua

$\rho_{corpo} < \rho_{H_2O} \Rightarrow$ il corpo galleggia

$\rho_{corpo} = \rho_{H_2O} \Rightarrow$ il corpo è in equilibrio

$\rho_{corpo} > \rho_{H_2O} \Rightarrow$ il corpo affonda

E nell'aria?

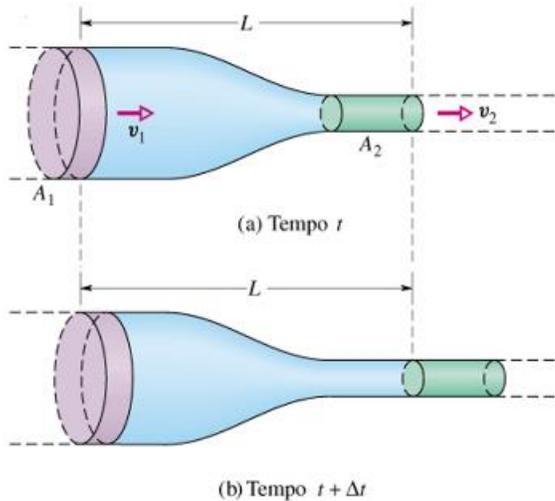
I palloni aerostatici sfruttano la spinta di Archimede in aria:

- l'aria riscaldata sale all'interno del pallone, avendo densità minore di quella esterna. Si ha una diminuzione del peso dell'intero sistema, prevale la spinta di Archimede e l'aerostato si solleva;
- Aprendo la valvola posta sopra il pallone, l'aria calda fuoriesce e viene sostituita da quella più fredda che entra nell'involucro dal basso. In tal caso si ottiene la discesa dell'aerostato.



Dinamica dei fluidi (Idrodinamica)

Equazione di continuità: per un fluido ideale in moto stazionario (indipendente dal tempo)

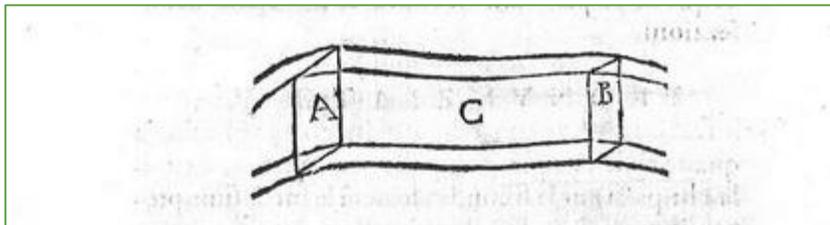
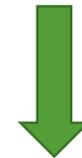


$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \text{costante}$$



$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{costante (per fluidi incompressibili)}$$

La grandezza Av prende il nome di **portata (volumetrica)** e rappresenta il volume di fluido che attraversa la sezione nell'unità di tempo.



Legge di conservazione della portata (B. Castelli)

$$Q = Av = \text{costante}$$

Moltissime notizie ancora si possono dedurre dalla medesima dottrina, le quali tralascio, perchè ciascheduno da se stesso le potrà facilmente intendere, fermata bene, che averà questa massima; che non è possibile pronunziare niente di certo intorno alla **quantità dell' acqua** corrente, con considerare solo la semplice misura volgare dell' acqua senza la velocità, siccome per lo contrario; chi tenesse conto solamente della velocità senza la misura commetterebbe errori grandissimi; imperocchè trattandosi della misura dell' acqua corrente, è necessario, essendo l' acqua corpo, per formare concetto della sua quantità, considerare in essa tutte tre le dimensioni, cioè, larghezza, profondità, e lunghezza: le prime due dimensioni sono osservate da tutti nel modo comune, ed ordinario di misurare le acque correnti; ma viene tralasciata la terza dimensione della lunghezza, e forse tal mancamento è stato commesso, per essere riputata la lunghezza dell' acqua corrente in un certo modo infinita, mentre non finisce mai di passare, e come infinita è stata giudicata incomprendibile, e tale, che non se ne possa avere determinata notizia, e pertanto non è stato di essa tenuto conto alcuno; ma se noi più attentamente faremo riflessione alla considerazione nostra della velocità dell'

Tom. I.

L

...

acqua,

Definizione di **portata** in Guglielmini, *Misura delle acque correnti*, libro I

locità maggiore dell'altra, e così al contrario.

XL. *Quantità d'acqua* intendiamo tutta la mole dell'acqua, che in un dato tempo scorre per una data sezione.

VII. Quello che abbiamo detto intorno alla egualità, ed ineguali-

Definizione di **portata** in Guglielmini, *Della natura dei fiumi*, capitolo IV, regola III

R E G O L A I I I.

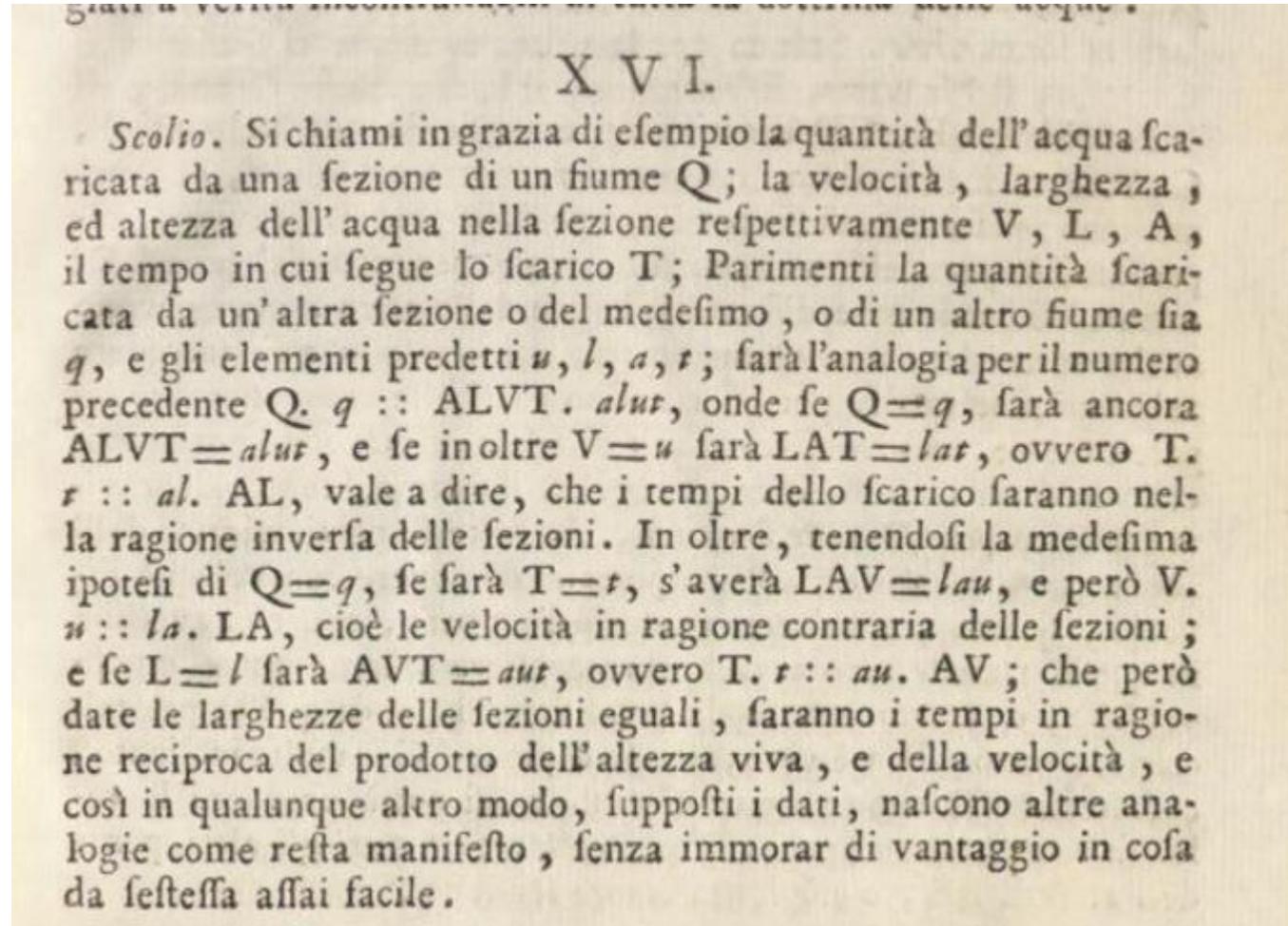
Dalla medesima ragione facilmente si può dedurre, che (a) la velocità di un fiume allora sarà maggiore, quando più grande sarà il corpo d'acqua, che porterà; posciachè, (supposto il medesimo pendio, e le medesime resistenze) avrà più forza di superar queste, la copia più grande dell'acqua, come più grave, che la minore: e perciò i fiumi nelle loro piene, corrono con maggiore velocità, che ne' tempi, ne' quali sono più magri di acqua; il che è vero ancora per un'altra ragione, cioè, perchè l'acqua più alta, e per conseguenza maggiormente lontana dal fondo, più si scosta dalle resistenze di esso. Bisogna però avvertire di non lasciarsi ingannare dall'apparenza, che ordinariamente lusinga gli uomini a giudicare della portata dell'acqua di un fiume.

DELLA NATURA DE' FIUMI.

287

fiume, dalla grandezza della sezione di esso, senza considerazione della velocità; poichè può darsi il caso, che l'altezza maggiore dell'acqua dipenda dal ritardamento della velocità, non dall'accrescimento di acqua nel fiume; e che in vece, che dall'altezza maggiore si possa arguire maggior velocità, piuttosto si riscontri minore; ma ciò non succederà ne' nostri supposti.

Definizione di **portata** in Zendrini, *Leggi e fenomeni, regolazioni ed usi delle acque correnti*, capitolo I, scolio XVI



Teorema di Bernoulli

Per fluidi ideali incomprimibili, non viscosi, in moto stazionario e irrotazionale

Consideriamo un tubo di forma generica in cui scorre un fluido ideale in regime permanente fra due sezioni e supponiamo che il fluido non riceva energia dall'esterno e non ne ceda.

Le forze che compiono lavoro sono la gravità e le forze dovute alla pressione esercitata dal fluido circostante (perpendicolari in ogni punto alla superficie del tubo).

$$L_{pressione} = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) \cdot \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$L_{gravità} = -\Delta V_g = -\Delta m g (h_2 - h_1)$$

Per il teorema delle forze vive

$$L_{pressione} + L_{gravità} = \text{variazione di en. Cinetica}$$

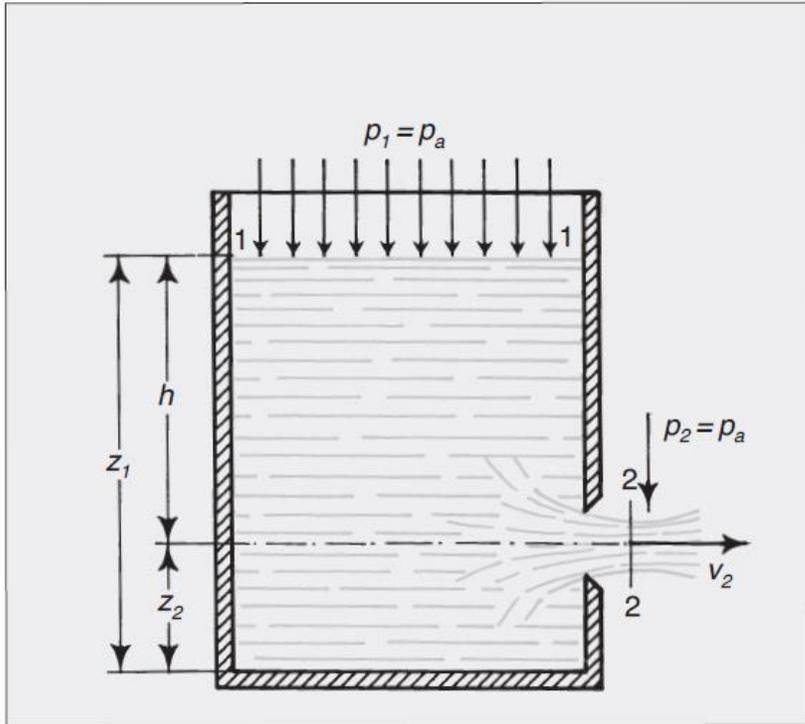
$$(p_1 - p_2) \cdot \frac{\Delta m}{\rho} - \Delta m g (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 = \text{costante}$$

Teorema di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g h = \text{costante}$$

Conseguenze del teorema di Bernoulli



Supponiamo che il recipiente abbia un volume grandissimo in modo che il livello del liquido non muti sostanzialmente per effetto dell'efflusso attraverso il foro praticato nella parete.

Si applica il TdB alle sezioni 1 e 2, con le ipotesi:

$$p_1 = p_2 = \text{press. atm.}; v_1 = 0$$

Si ha:

$$z_1 = z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Da cui, ponendo $z_1 - z_2 = h$, si ricava la velocità del liquido:

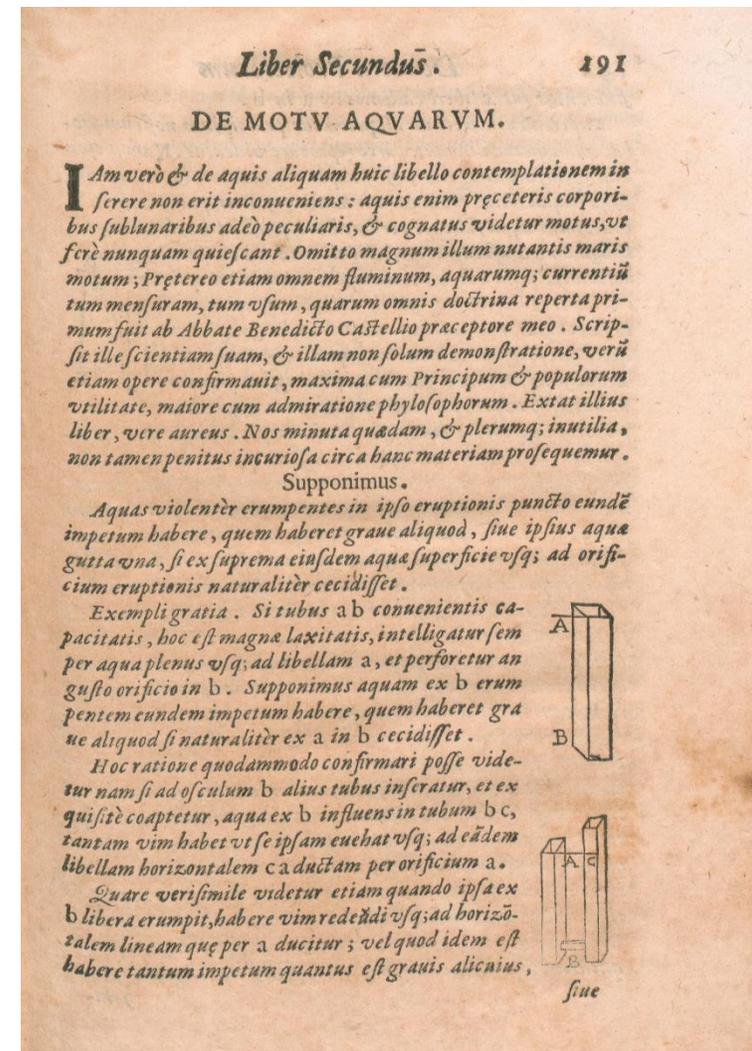
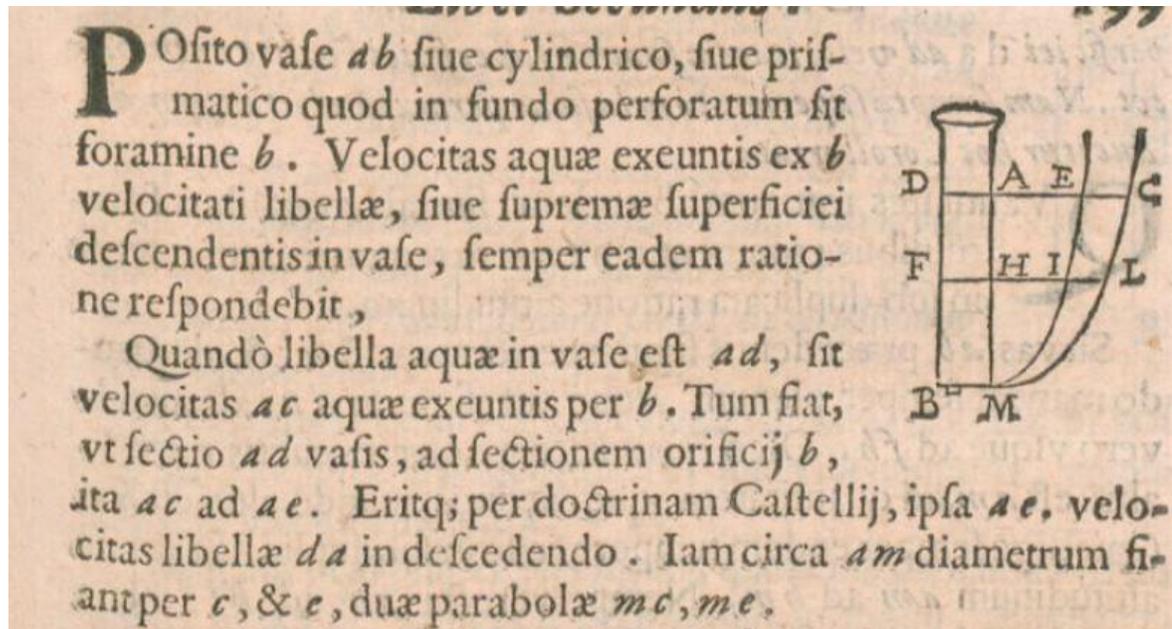
$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Legge di Torricelli

Torricelli, legge di efflusso da un foro

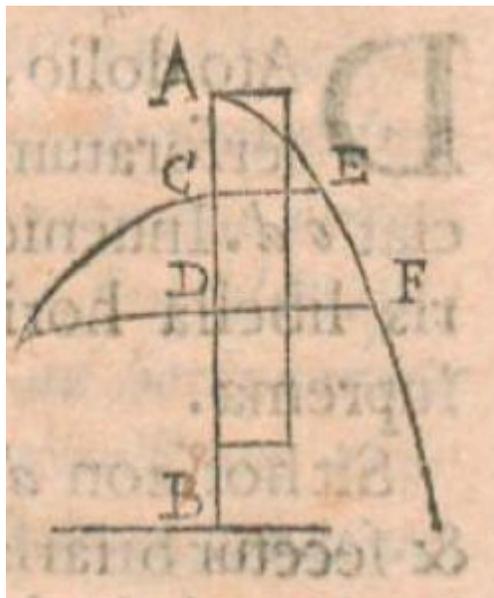
I contributi di **Torricelli** alla scienza delle acque sono contenuti nell'opera *De motu gravium naturaliter descendentium, et projectorum libri duo* (in *Opera geometrica*, Firenze, 1644).

Mediante un esperimento, incluso nella sezione *De motu aquarum*, viene spiegata la **legge dell'efflusso da un foro**, legge che secondo Torricelli si può applicare anche a fiumi e canali.



Grazie all'analogia con la caduta libera, Torricelli trova un modello utile per spiegare la relazione tra velocità, pressione e profondità.

Legge dell'efflusso:
profilo parabolico
delle velocità



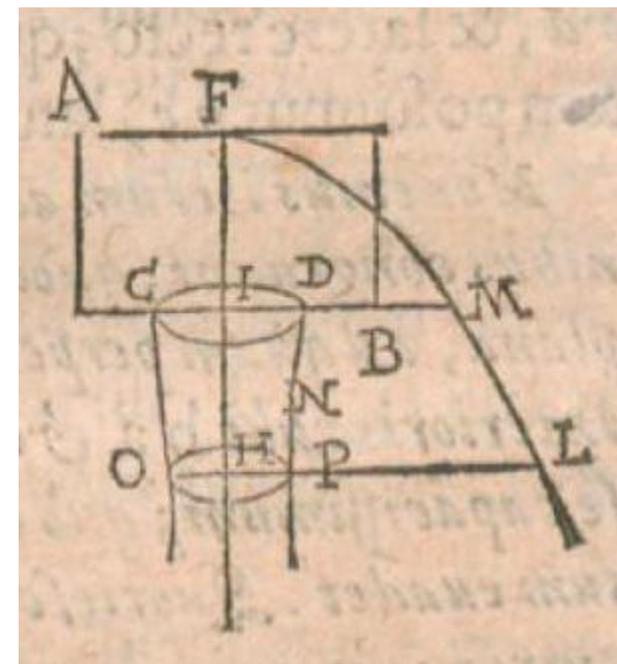
Se si considera il foro sufficientemente piccolo rispetto alla sezione, risulterà

$$P \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} v^2$$

da cui si ricava che

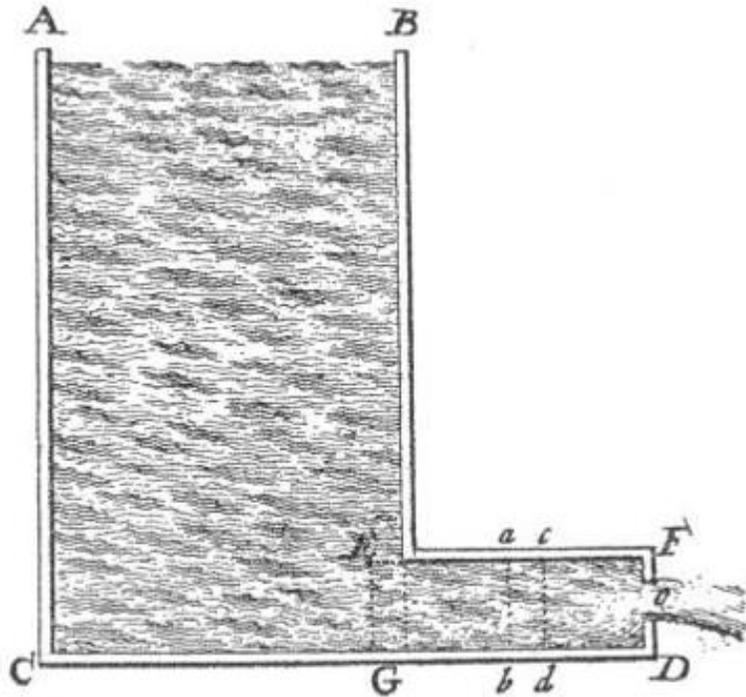
$$v = \sqrt{2gh}$$

cioè la velocità di un fluido che esce da un foro (di sezione trascurabile rispetto alle dimensioni del recipiente) è pari alla radice quadrata del doppio prodotto tra l'accelerazione di gravità g e la distanza h . (**Legge di Torricelli**)



Il solido OCDP descrive l'acqua cadente dall'apertura CD praticata sul fondo del recipiente AB

Pressione esercitata da un fluido in movimento sulle pareti del recipiente. Per un fluido in movimento D. Bernoulli definisce la pressione “idraulico-statica” su una parete nel modo seguente:



Si suppone la sezione S del recipiente verticale ABCG molto maggiore della sezione s del tubo attaccato EFDG, che a sua volta è molto maggiore della sezione e del foro o . Quindi la **velocità u di uscita** dell’acqua attraverso o sarà

$$u = \sqrt{2gh}$$

A causa della conservazione del flusso, la **velocità v dentro al tubo** è data da:

$$v = \frac{\varepsilon}{S} u$$

Bernoulli immagina che il tubo sia improvvisamente spezzato in ab e rende la pressione sulla parete (P) proporzionale all’accelerazione dell’acqua in quell’istante, ottenendo

$$P = gh - \frac{1}{2} v^2$$

Conseguenze del teorema di Bernoulli

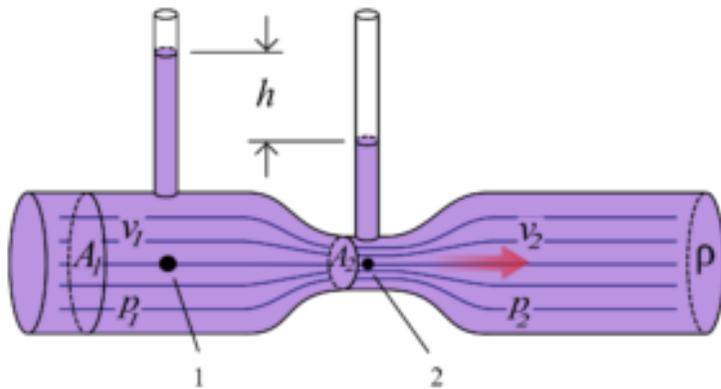
- Se $v_1 = v_2 = 0$ (equilibrio), il TdB contiene la legge di Stevino come caso particolare.

$$\frac{p}{\rho} + gh = \text{costante}$$

- A parità di quota effettiva ($h_1 = h_2$), ad un aumento di velocità corrisponde una diminuzione di pressione.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{costante}$$

- **Tubo di Venturi:** strumento per misurare la velocità (fluido incomprimibile)



Si tratta di un tubo con una sezione di ingresso di area A_1 che si restringe fino ad assumere il valore A_2 . Si possono determinare i valori di Q e v :

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_{A_1} - p_{A_2})A_1^2 A_2^2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}; v = 2g \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2} \sqrt{h_{A_1} - h_{A_2}}$$

Approfondimento sul tubo di Venturi

Una diminuzione della sezione della condotta percorsa da un fluido in moto permanente provoca un aumento della velocità locale ed una corrispondente diminuzione della pressione, che è in relazione determinata con la velocità e quindi con la portata. (G. Venturi, Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides, appliqué à l'explication de différens phénomènes hydrauliques, 1797)

Applicando al fluido incomprimibile l'equazione di continuità e il TdB si ha:

$$A_1 v_{A_1} = A_2 v_{A_2}$$
$$\frac{1}{2} \rho v_{A_1}^2 + p_{A_1} = \frac{1}{2} \rho v_{A_2}^2 + p_{A_2}$$

Da cui

$$\frac{1}{2} \rho (v_{A_1}^2 - v_{A_2}^2) + p_{A_1} - p_{A_2} = 0$$

Essendo $Q = A_1 v_{A_1} = A_2 v_{A_2}$

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q^2}{A_1^2} - \frac{Q^2}{A_2^2} \right) + p_{A_1} - p_{A_2} = 0$$

Da cui si ricavano i valori della portata Q e della velocità v .

Idraulica e Idrometria. Strumenti per la misura della velocità delle acque a diverse profondità

Dispositivi per la misura della velocità:

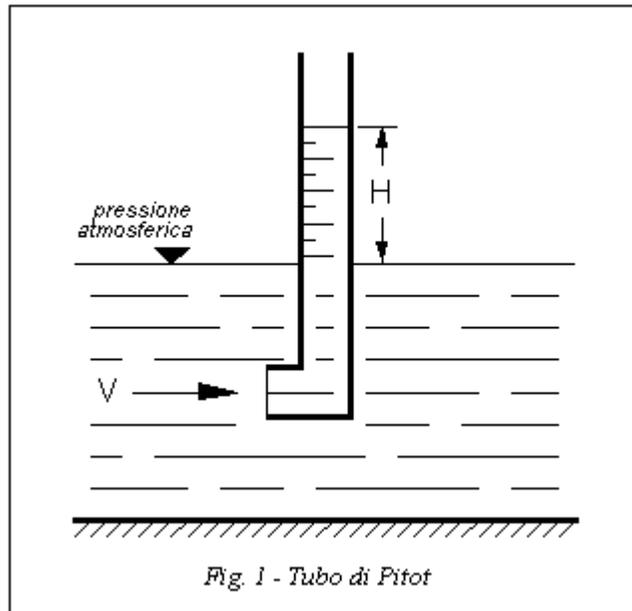
- Alcuni esempi di **idrometri fissi** (asta rigida graduata: padimetro) e **mobili** (aste che si immergono nel luogo voluto allo scopo di misurare la distanza fra il fondo e la superficie libera, scandagli, costituiti da un filo metallico con zavorra a un'estremità)
- Manometri differenziali usati per il rilievo delle perdite di carico fra due punti di una condotta in pressione (tubo di Pitot, Venturimetro)
- *Galleggianti*: generalmente si adoperano nelle correnti aperte, formati di sfere metalliche cave o tavolette che si gettano nei canali o fiumi per tratti rettilinei in modo che dal tempo t impiegato a percorrere una data lunghezza s è possibile dedurre la velocità del galleggiante $v = s/t$, e quindi della corrente che lo trascina.
- Per avere invece determinazioni di velocità sotto la superficie è necessario ricorrere a corpi di peso specifico esattamente eguale a quello dell'acqua oppure di peso poco maggiore.
- *Asta ritrometrica* (dal gr. ρειθρόν "corrente di un fiume").

Possibile approfondimento sul tubo di Pitot

Un altro strumento per misurare la velocità di un fluido consiste nel determinare la pressione necessaria per arrestarne il moto.

Usato per la prima volta per misurare la velocità dell'acqua della Senna (Henri Pitot, 1732).

Tubo a L, un ramo del quale viene immerso nel fluido in movimento con l'asse allineato ai filetti fluidi e l'imboccatura posta contro corrente, mentre l'altro, posizionato verticalmente, ne emerge.



Il fluido che penetra nel tubo si arresta, mentre il resto del fluido continua il proprio moto. Se il tubo è posto orizzontalmente, per il TdB si ha:

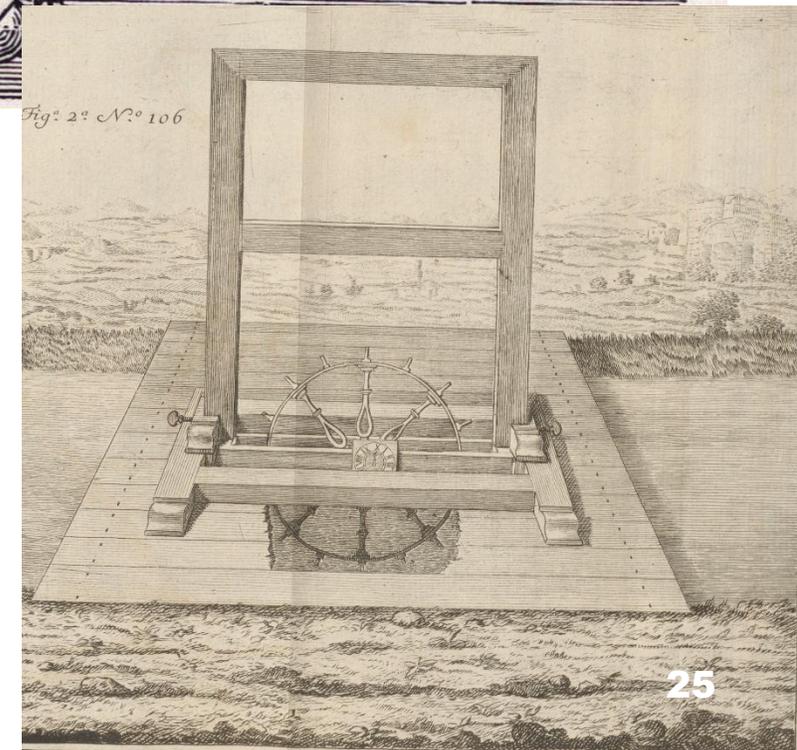
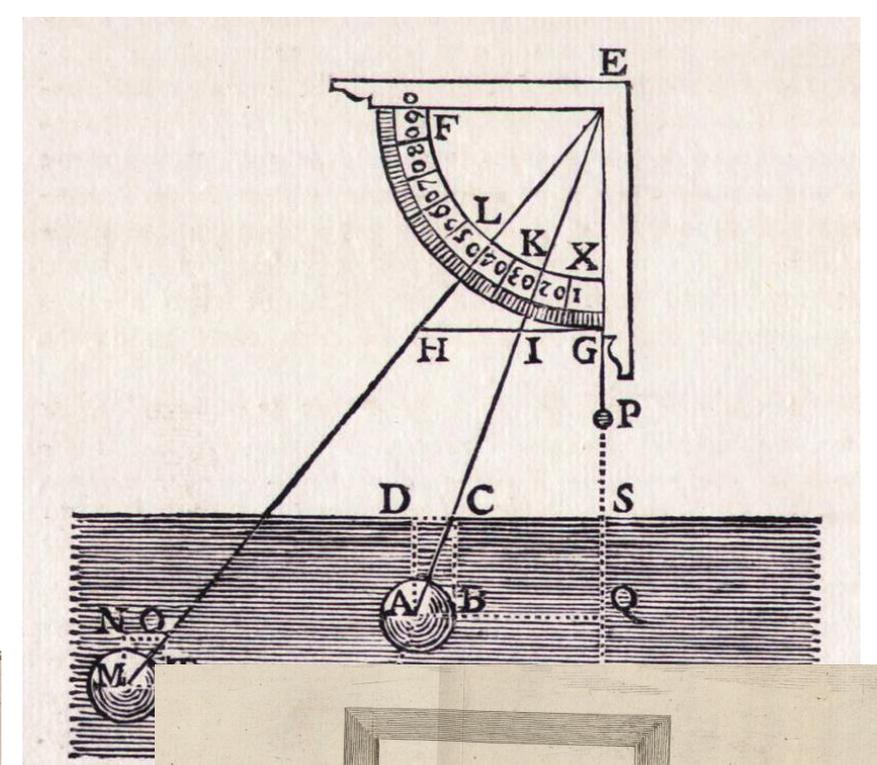
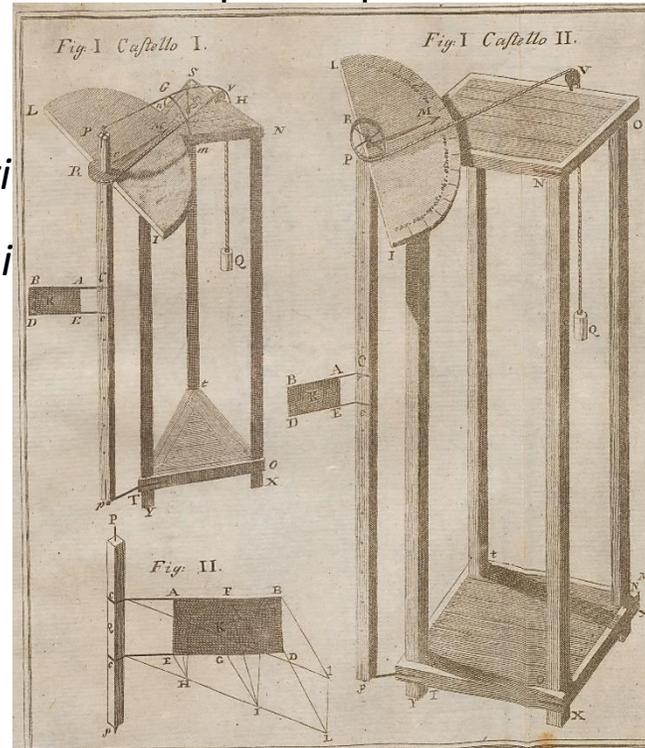
$$\frac{p_{est}}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v_{est}^2}{g} = \frac{p_{int}}{\rho g}$$

Essendo $H = \frac{p_{int}}{\rho g} - \frac{p_{est}}{\rho g}$ il dislivello (misurabile direttamente), si ottiene

$$v = \sqrt{2gH}$$

Tachimetri idraulici fissi

- palla a pendolo con quadrante (D. Guglielmini, *Aquarum fluentium mensura*, 1690-91)
- ruota con palmette di Michelotti (F. D. Michelotti, *Sperimenti idraulici*, 1767-71). Il dispositivo, contando il numero di giri compiuti da una ruota in un dato tempo, forniva la velocità del fluido in un punto quando esso colpiva la palmetta della ruota.
- ventola idraulica (L. Ximenes, *Nuove sperienze ne' fiumi per verificare le principali leggi correnti*, 1780)



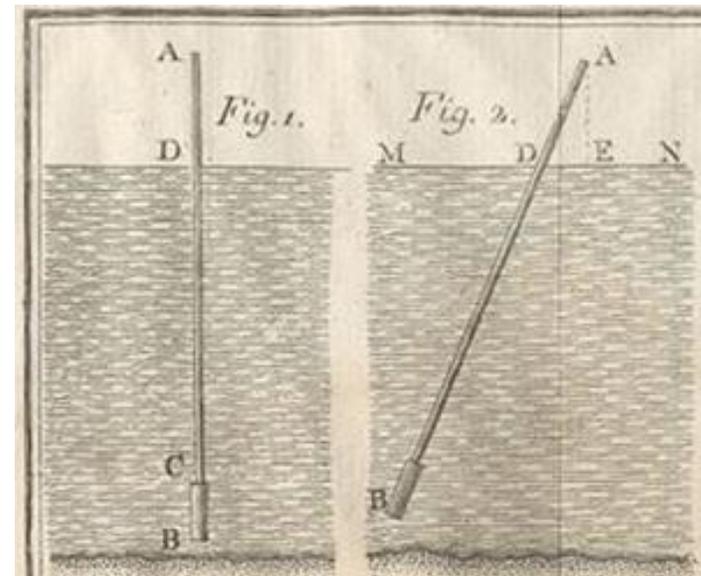
Tachimetri galleggianti per la misura della velocità media

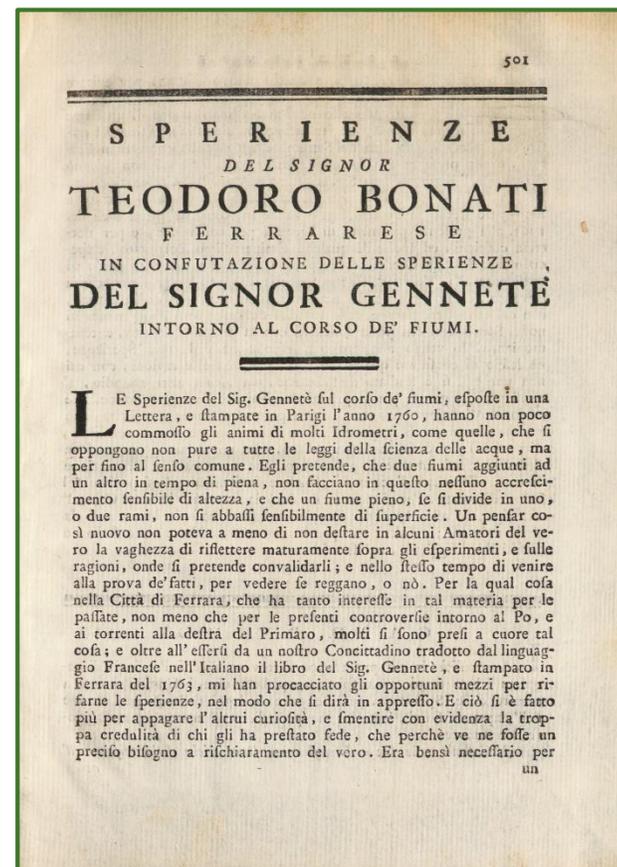
propone un' asta di legno, lunga quanto si vuole, con un peso attaccatovi in fondo per tenerla diritta, ed una corona di zucche, o vesciche B, C, legatevi dal capo A; ficchè immersa nel fiume, galleggiar possa la sola parte B A C, ed il resto rimanere sommerso. Il Grandi dubi-



- asta idrometrica (N. Cabeo, 1646).
- asta ritrometrica (T. Bonati, 1784).

SE ad un' Asta AC (fig. 1.) di legno più leggiero dell' acqua si aggiunga una tal porzione CB di metallo, che mettendo tutta l' asta in una acqua stagnante essa galleggi con una porzione AD di un piede o più, fuori dell' acqua ed a piombo, si avrà una delle *Aste ritrometriche* da me proposte nel 1784. in questa Raccolta per iscoprire le velocità sotto la superficie dell' acqua nei fiumi. Mostrai, che se la stess' asta AB (fig. 2.) messa in un' acqua corrente da M verso N verrà portata colla porzione AD inclinata all' avanti, la velocità maggiore starà alla superficie; e che si avrà il contrario se la parte AD penderà all' indietro.





1766

Saggio di una Nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e Nuovo metodo per trovare colla sperienza la quantità dell'acqua corrente per un fiume (1784)

Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un'Acqua corrente (1799)

Sitografia per le fonti

Castelli Benedetto, *Della misura dell'acque correnti* (Roma, 1628)

<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3705668>

Toricelli Evangelista, *Opera geometrica* (Firenze, 1644)

<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1275063>

Bernoulli Daniel, *Hydrodynamica*, Argentorati, Deckeri, 1738.

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1227737>

Bernoulli Johann, *Hydraulica*, in *Opera omnia*, Lausannae et Genevae, Bousquet, 1742, t. IV, pp. 391-493.

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1053416>

Euler Leonhard

- *Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide*, Mém. Acad. Berlin (1757)
- *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Berlin (1757)
- *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Berlin (1757)
- *Recherches sur le mouvement des rivières* (1767)

The Euler archive: <http://eulerarchive.maa.org/>

Raccolta d'autori che trattano del moto dell'acque: <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3537770>