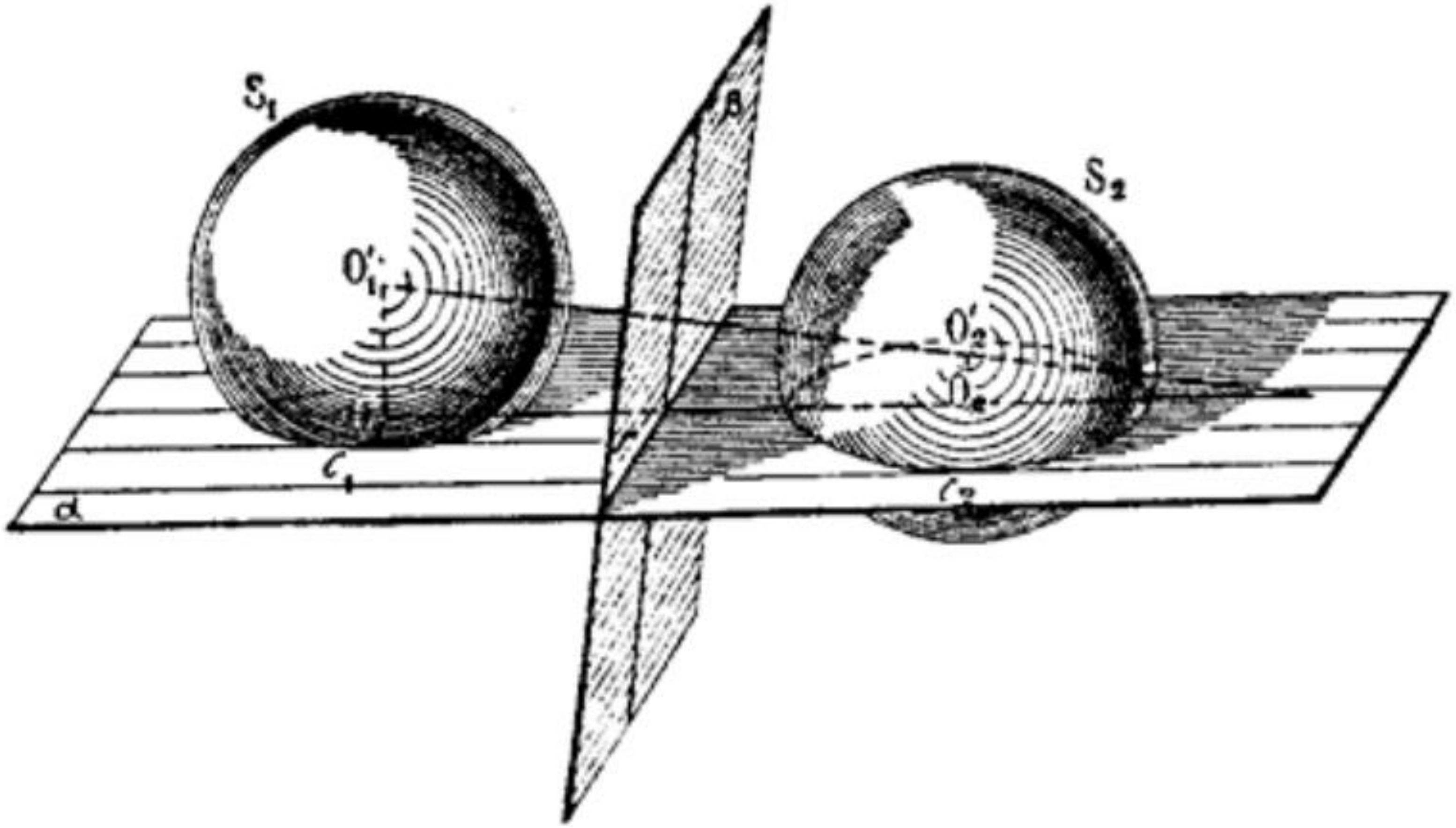
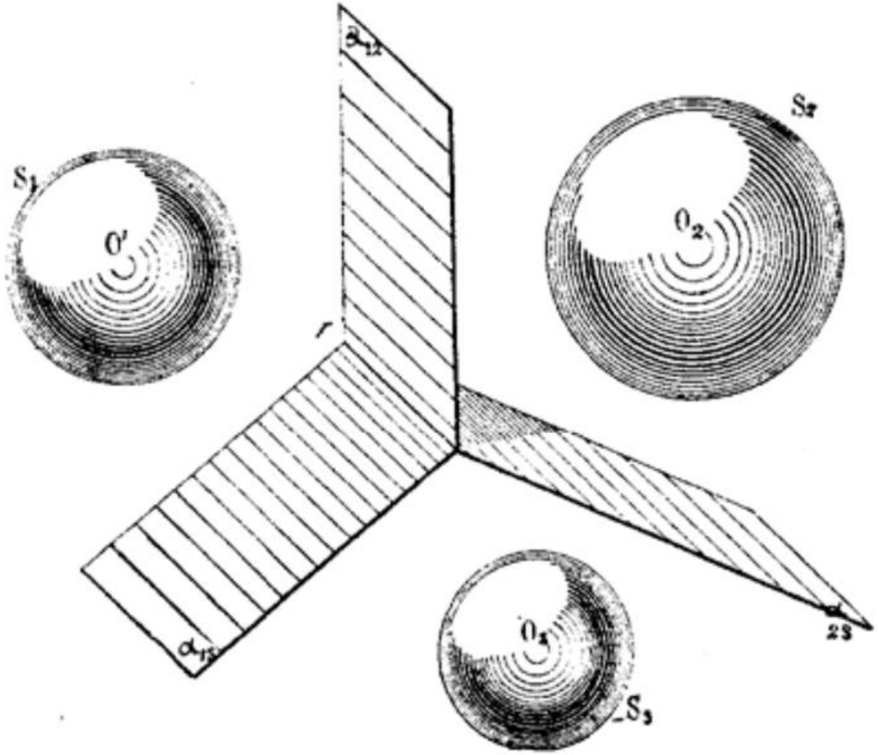


Il fusionismo

Un percorso didattico di approfondimento

Elena Lazzari, lzzlne@unife.it



L'origine e lo sviluppo del fusionismo

Il fusionismo

La definizione

Il fusionismo è un orientamento nell'insegnamento della geometria elementare che propone di trattare simultaneamente argomenti affini di geometria piana e geometria solida.

Gli inizi

- Nesce in Europa negli anni Quaranta del '800.
- Si diffonde in Italia dagli anni Ottanta del '800.
- Fonda le sue origini nella geometria proiettiva di Gaspard Monge.

In Europa

Le prime opere

- *Analogies de la Géométrie élémentaire*, di Gabriel Alcippe Mahistre, pubblicato in Francia nel 1844;
- *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht ab Gymnasien und höheren Realschulen*, di Anton Bretschneider, pubblicato in Germania nel 1844;

Le successive

- *Oversigt over Hovedformerne i Rummet som Indledning til Geometrien,* di Adolph Steen, pubblicato in Danimarca nel 1858;
- *Nouveaux éléments de géométrie* di Charles Méray, pubblicato in Francia nel 1874.

In Italia

Le prime opere

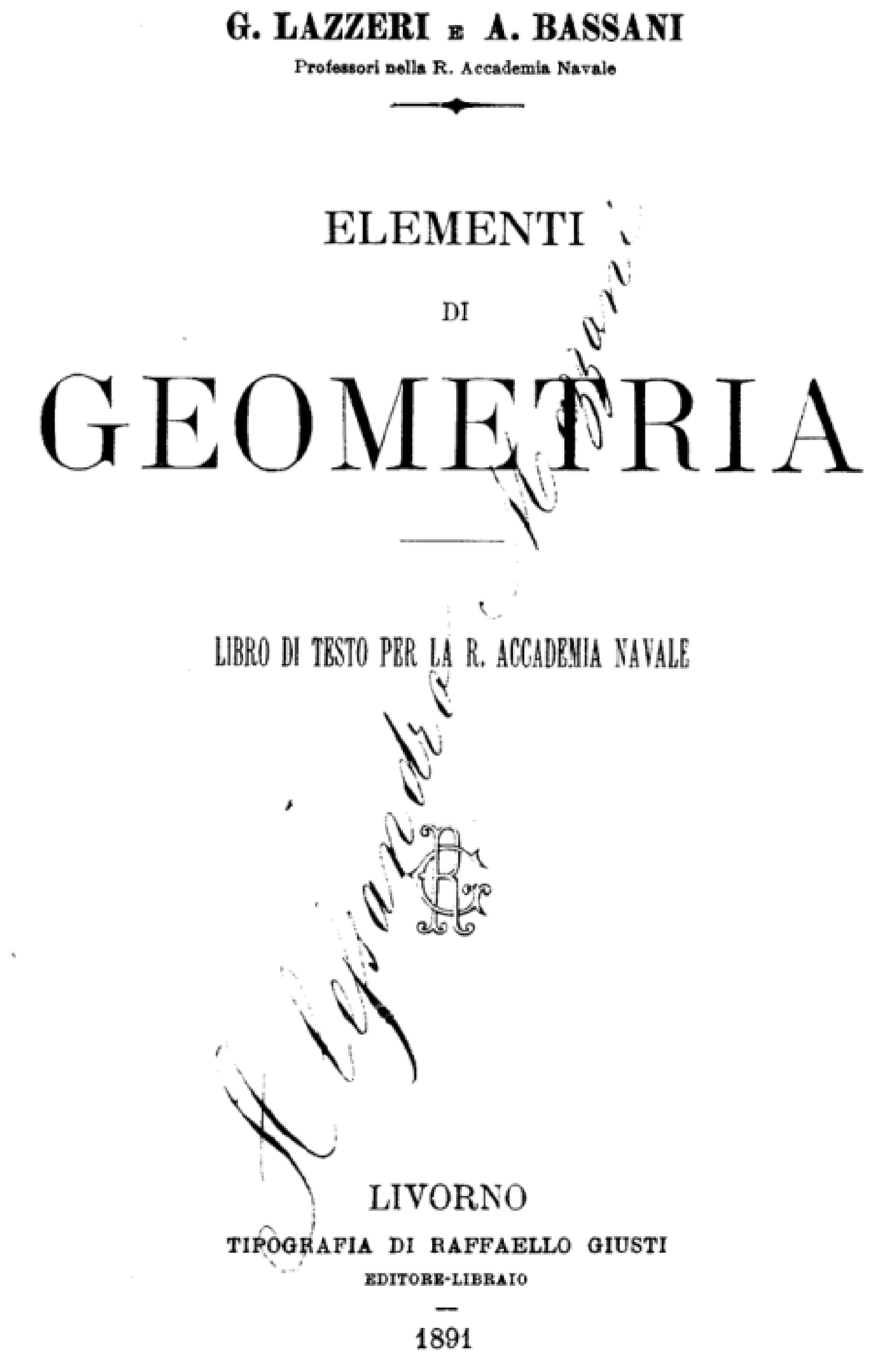
- *Elementi di geometria,* di Riccardo De Paolis, pubblicato nel 1884;
- *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo*, di Angelo Andriani, pubblicato nel 1887;

Le successive

- *Elementi di geometria* di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani, pubblicato nel 1891;
- *Complementi di geometria,* di Giuseppe Zaccaria Reggio, pubblicato nel 1898;
- *Elementi di geometria,* di Giuseppe Ingrami, pubblicato nel 1899.

L’opera di Lazzeri e Bassani

G. Lazzeri, A. Bassani (1891), *Elementi di geometria: libro di testo per la R. Accademia Navale*, Livorno, Giusti, (2a ed 1898).



G. LAZZERI E A. BASSANI

Professori nella R. Accademia Navale

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

LIBRO DI TESTO PER LA R. ACCADEMIA NAVALE

LIVORNO

TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO GIUSTI

EDITORE-LIBRAIO

1891

L'opera di Lazzeri e Bassani

La divisione in libri:

I. Retta e piano. Segmenti, angoli e diedri. Prime nozioni sul circolo e sulla sfera. Rette parallele, rette e piani paralleli.

II. Poligoni, angoloidi, poliedri. Distanze.

III. Relazioni fra rette, piani e sfere. Relazioni di poligoni con un circolo e di poliedri con una sfera, Superfici e solidi di rotazione.

IV. Teoria generale dell'equivalenza. Equivalenza di poligoni e superfici poliedriche; di poligoni sferici e di piramidi sferiche; dei prismi. Grandezze limite. Equivalenza dei poliedri: Equivalenza del circolo e dei corpi rotondi.

V. Teoria delle proporzioni. Figure simili. Misure. Applicazione dell'Algebra alla Geometria.

Il dibattito in Italia

Pro

- il risparmio di tempo;
- la semplificazione di alcune teorie di geometria piana;
- il miglior coordinamento dello studio della matematica è con quello delle altre discipline scientifiche.

Contro

- la difficoltà nel concepire una intuizione spaziale e la mancanza di modelli adeguati;
- la mancata gradualità nel passare da argomenti più semplici a più complessi;
- il ritardo nella esposizione di altre teorie.

Il dibattito in Italia

Tra il IXX e il XX secolo:

Pur con diverse posizioni, l'idea generalmente condivisa era quella di lasciare la possibilità ai docenti di scegliere l'approccio desiderato per l'insegnamento della geometria elementare.

All'inizio del XX secolo:

La polemica sul fusionismo si esaurì dopo i primi decenni del '900, con il tacito ritorno alla separazione tra geometria piana e solida.

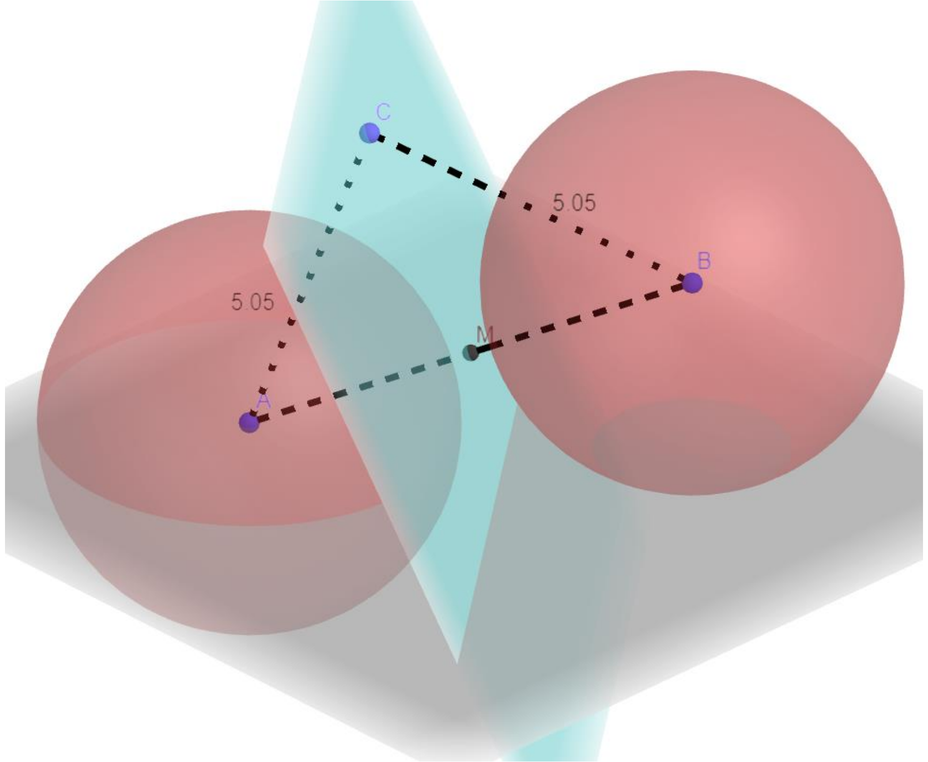
Gli obiettivi del fusionismo

Didattici

- aumentare l'efficacia e l'efficienza dell'insegnamento della geometria;
- attualizzare l'insegnamento secondario.

Epistemologici

- rendere più semplice e rigorosa l'esposizione della geometria elementare;
- esplicitare il legame delle diverse teorie della geometria dagli assiomi dal quale dipendono.



Il percorso didattico di approfondimento

Le caratteristiche

Argomento

- teoria degli assi radicali

Destinatari

- secondo biennio di liceo

Strumenti

- fonte storica originale: *Elementi di Geometria* di Lazzeri e Bassani (1898), http://mathematica.sns.it/opere/169/
- software di geometria dinamica.

Le caratteristiche

Obiettivi specifici di apprendimento

Dalle Indicazioni Nazionali del 2010, nucleo Geometria:

"Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità."

Le caratteristiche

Tempistiche

- l'attività didattica proposta prevede una durata indicativa di 6 ore.

Metodologie

- cooperative learning;
- laboratorio didattico.

Fasi di attuazione

- attività in piccoli gruppi su fonte storica originale;
- discussione collettiva supportata da GeoGebra 3D.

Le lezioni

Parte 1

G. Lazzeri, A. Bassani (1891), *Elementi di geometria: libro di testo per la R. Accademia Navale*, Livorno, Giusti, (2a ed 1898)

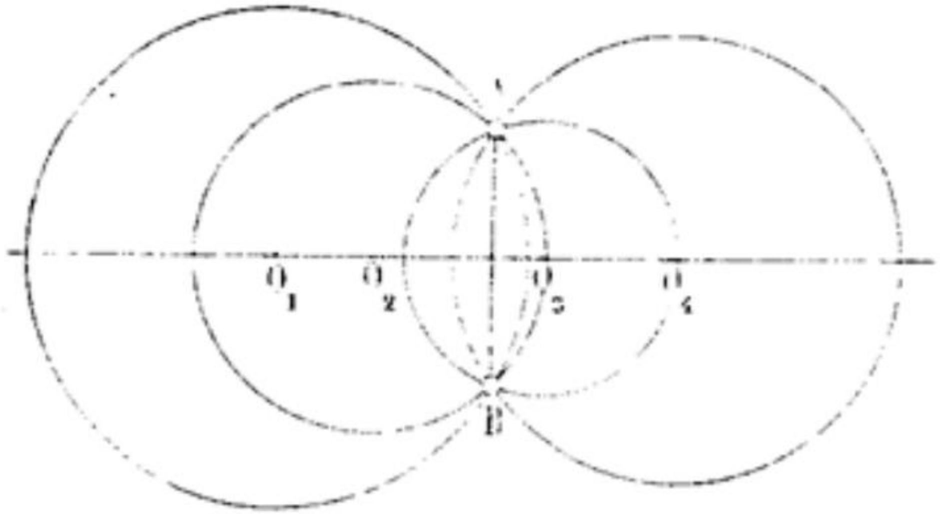
- Libro III
- Capitolo II (Relazioni fra rette, piani e sfere)
- Paragrafo 195 e Paragrafo 196

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere

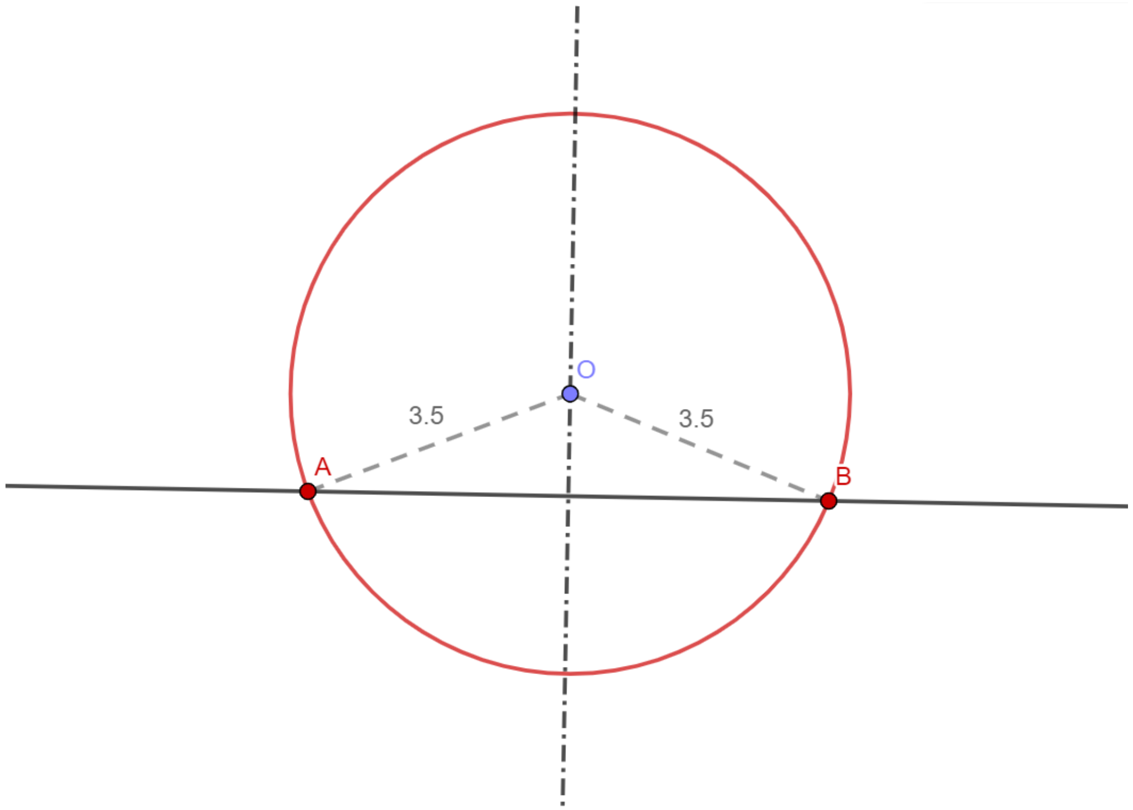
Teorema 1°. — *Esistono in un piano infiniti circoli che passano per due dei suoi punti. Il luogo geometrico dei loro centri è la retta perpendicolare al segmento, che ha per estremi i due punti, condotta nel piano dato per il punto di mezzo di quel segmento.*

Infatti, la retta *a*, perpendicolare al segmento AB nel suo punto di mezzo (Fig. 175), essendo il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B, è chiaro che un circolo, che abbia per centro un punto qualunque 0_1 di questa retta e per raggio la distanza di questo punto dai punti A, B, passa per i punti A, B. Nessun punto fuori della retta *a* può essere il centro di un circolo, che passi per A e per B, poichè esso non è egualmente distante da questi punti.



Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere



https://www.geogebra.org/classic/twxnkbev

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere

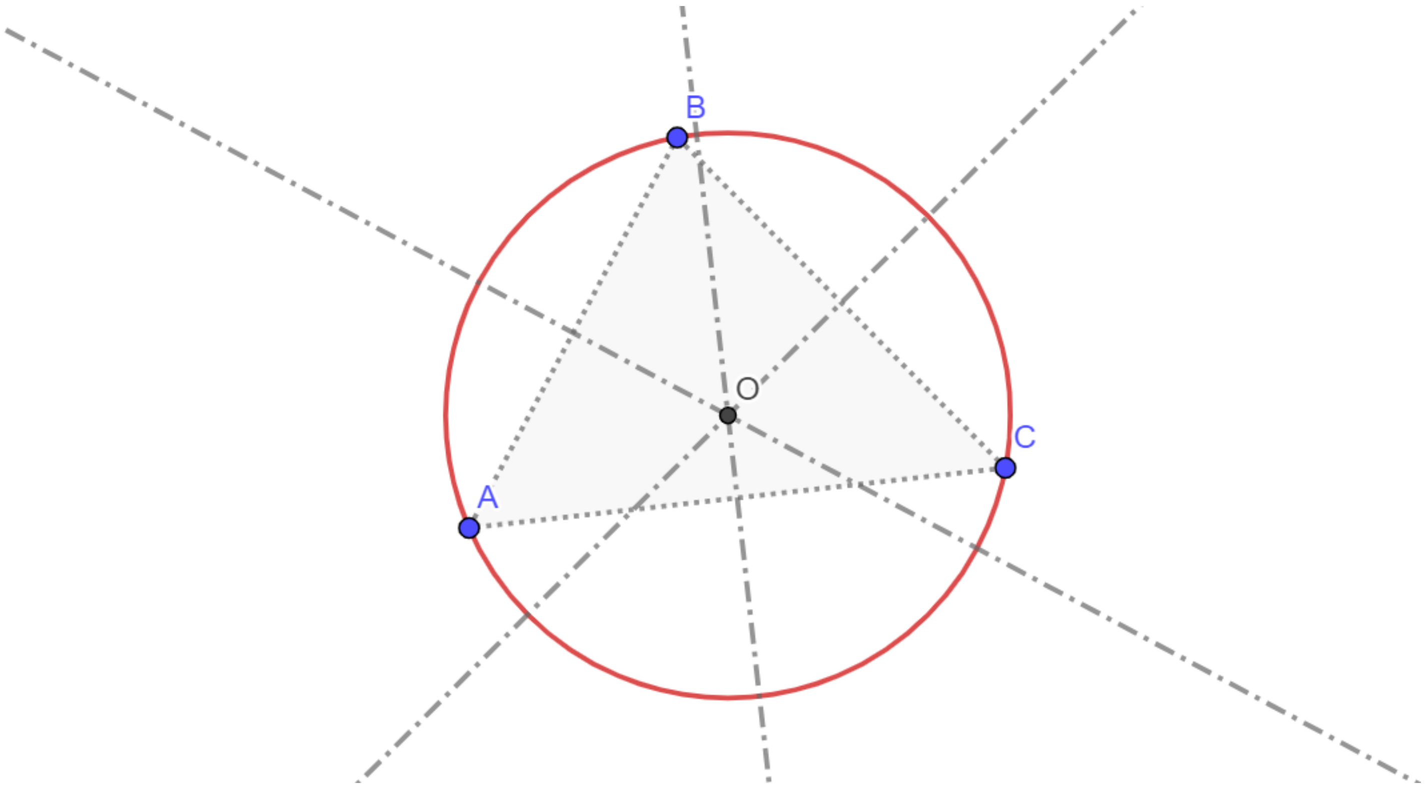
Teorema 2°. — *Per tre punti, non situati in linea retta, passa uno, ed un solo, circolo.*

Dati tre punti A, B, C, non in linea retta (Fig. 126), sappiamo che esiste uno ed un solo punto O nel loro piano, equidistante da essi (§ 160, Cor. 1°). Il circolo, che ha per centro O e per raggio la distanza OA, passa per i tre punti A, B, C, e non esistono evidentemente altri circoli che verificano la stessa condizione.

Corollario. — *Ad un triangolo si può sempre circoscrivere un circolo.*

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere



https://www.geogebra.org/classic/spejpjr5

Le lezioni

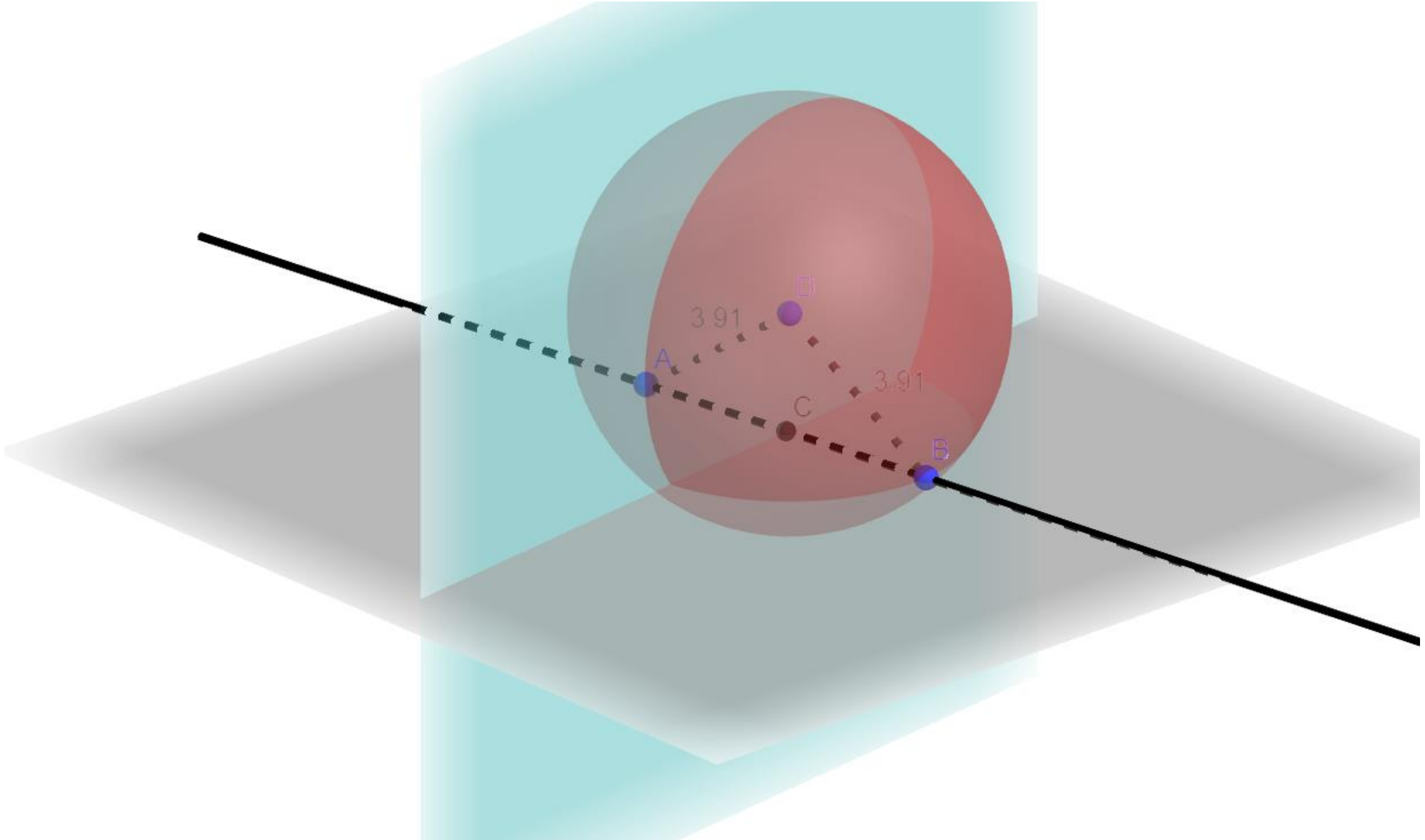
Relazioni tra rette, piani e sfere

Teorema 1°. — *Esistono infinite superficie sferiche, che passano per due punti; il luogo geometrico dei loro centri è il piano perpendicolare al segmento, che ha per estremi i punti stessi, condotto per il suo punto di mezzo.*

Infatti, il luogo dei punti equidistanti da due punti dati A. B è il piano α perpendicolare al segmento, che ha per estremi i due punti dati, condotto per il suo punto di mezzo (§ 161, Teor.): perciò ciascun punto di questo piano è centro di una superficie sferica, passante per i punti A, B, la quale ha per raggio la distanza del medesimo punto dai due punti dati. Nessun punto fuori del piano α può esser centro di una superficie sferica, che passa per i due punti dati. essendo disegualmente distante da essi.

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere



https://www.geogebra.org/classic/yfqjacvb

Le lezioni

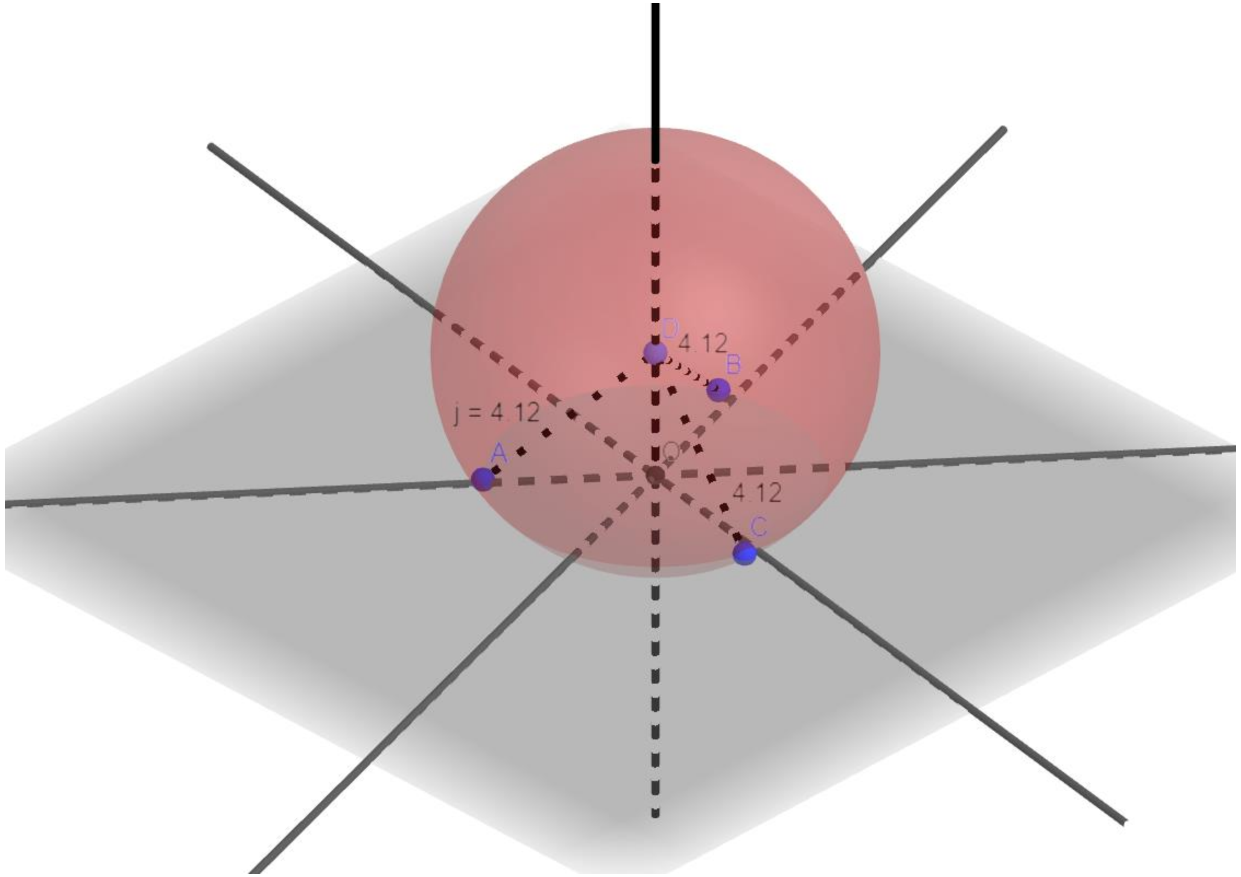
Relazioni tra rette, piani e sfere

Teorema 2°. — *Per tre punti, non situati in linea retta, passano infinite superficie sferiche; il luogo geometrico dei loro centri è la retta perpendicolare al piano individuato dai tre punti, condotta per il centro del circolo che passa per i punti stessi.*

Questo teorema si dimostra come il precedente, ricordando che il luogo dei punti equidistanti da tre punti dati A, B, C, non in linea retta, è la retta perpendicolare al loro piano, condotta per il punto di questo piano equidistante da essi, ossia per il centro del circolo che passa per essi (§ 161, Cor. 1°).

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere



https://www.geogebra.org/classic/a6ksfghn

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere

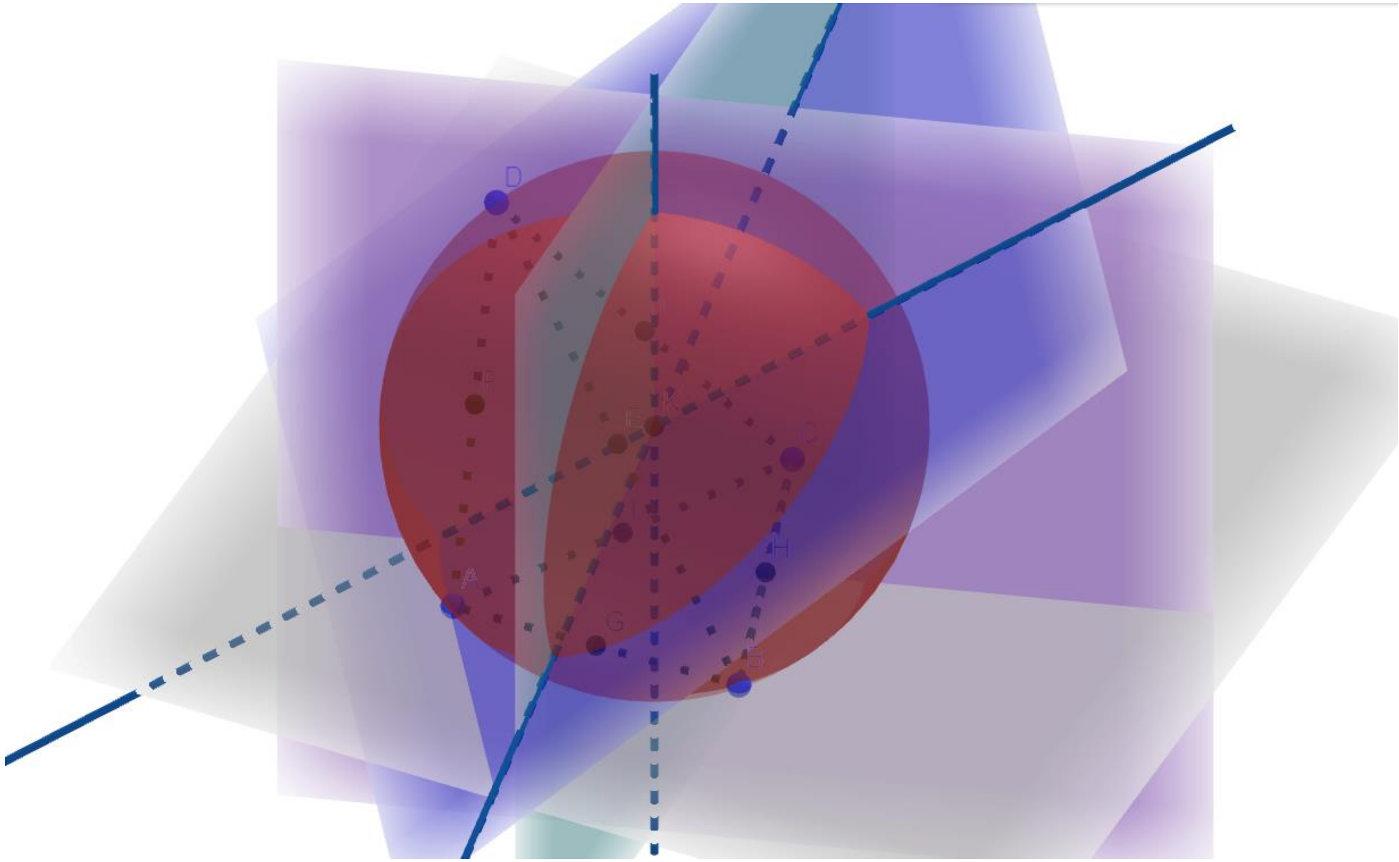
Teorema 3°. — *Per quattro punti, non situati in un piano, passa una, ed una sola, superficie sferica.*

Infatti, dati quattro punti A, B, C, D non situati in un piano, sappiamo che esiste uno, ed un solo, punto O, equidistante da essi (§ 161, Cor. 2°). Questo punto, ed esso solo è centro di una superficie sferica, che passa per i punti A, B, C, D, e che ha per raggio la distanza di O dai punti stessi.

Corollario. — *Ad un tetraedro si può circoscrivere una, ed una sola, sfera.*

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere



https://www.geogebra.org/classic/rkad9spf

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere

Paragrafo 195

- Teorema 1
- Teorema 2
- Corollario

Paragrafo 196

- Teorema 1
- Teorema 2
- Teorema 3
- Corollario

Le lezioni

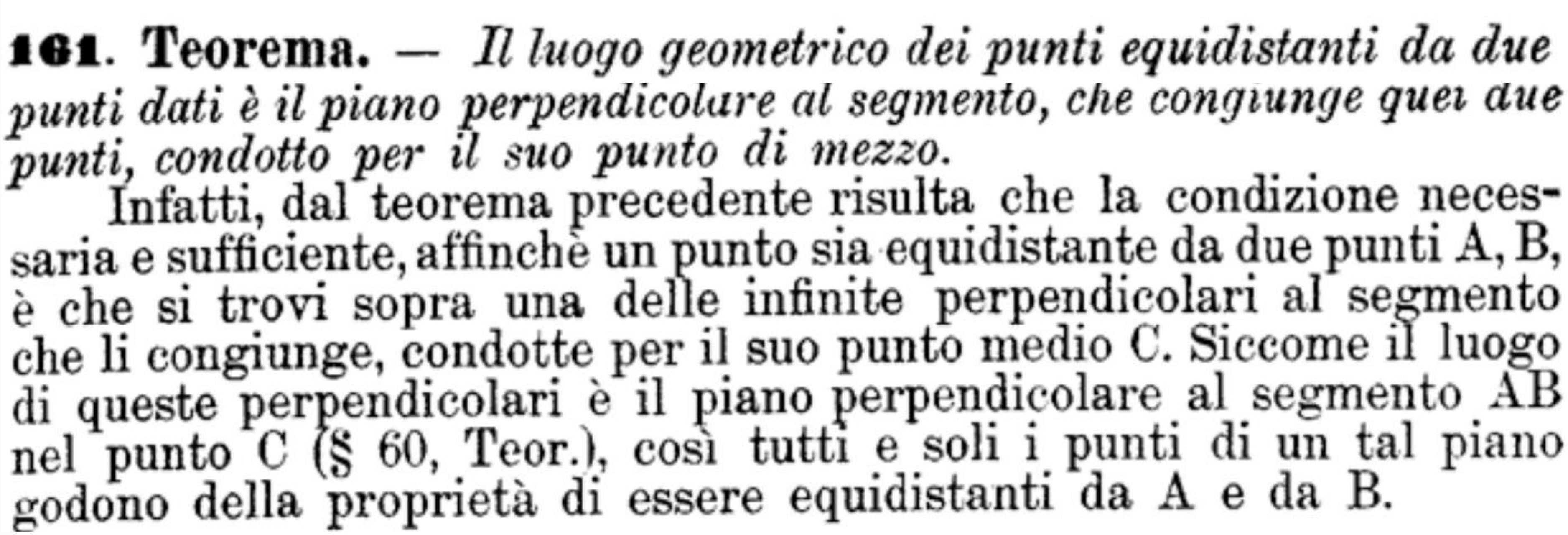
Parte 2

G. Lazzeri, A. Bassani (1891), *Elementi di geometria: libro di testo per la R. Accademia Navale*, Livorno, Giusti, (2a ed 1898)

- Libro II, Capitolo IV (Distanze)
- Libro III, Capitolo III (Sistemi di circoli e sfere);

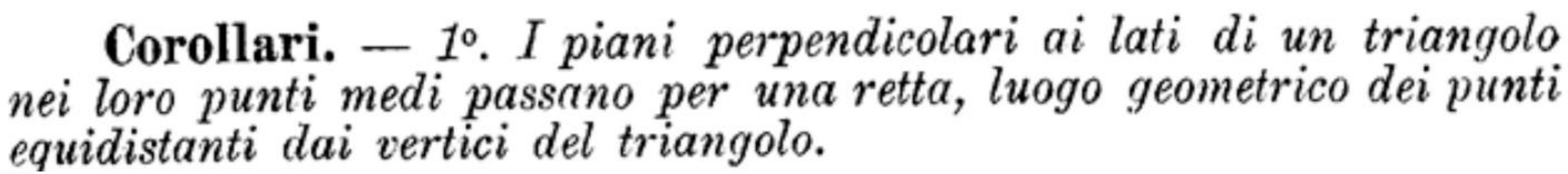
Le lezioni

Distanze



161. Teorema. — *Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti dati è il piano perpendicolare al segmento, che congiunge quei due punti, condotto per il suo punto di mezzo.*

Infatti, dal teorema precedente risulta che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un punto sia equidistante da due punti A, B, è che si trovi sopra una delle infinite perpendicolari al segmento che li congiunge, condotte per il suo punto medio C. Siccome il luogo di queste perpendicolari è il piano perpendicolare al segmento AB nel punto C (§ 60, Teor.), così tutti e soli i punti di un tal piano godono della proprietà di essere equidistanti da A e da B.



Corollari. — *1°. I piani perpendicolari ai lati di un triangolo nei loro punti medi passano per una retta, luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici del triangolo.*

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

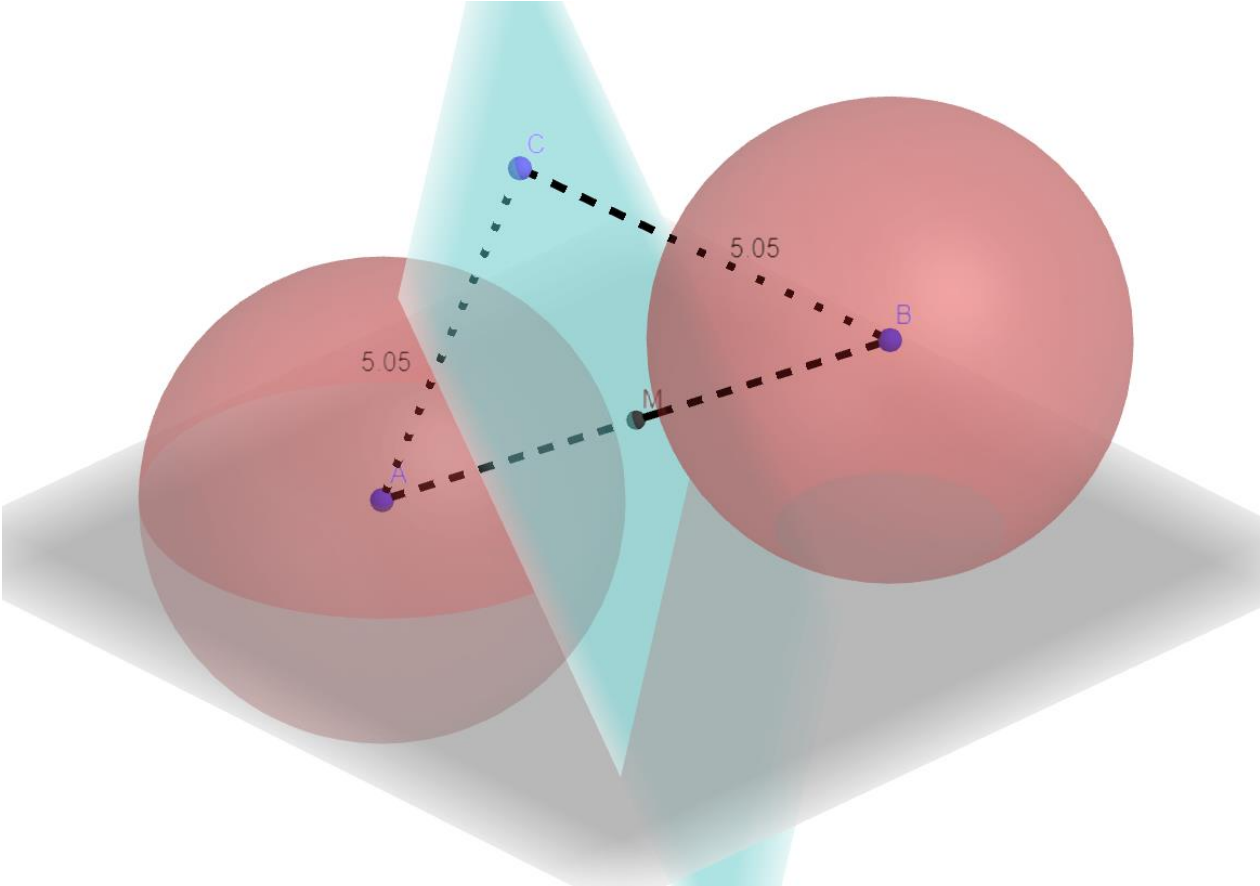
214. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due sfere eguali sieno eguali, è la parte, esterna alle due sfere, del piano perpendicolare al segmento congiungente i centri, nel suo punto di mezzo.*

Infatti, ogni punto P di questo piano α è equidistante dai centri O_1, O_2 delle due sfere S_1, S_2 (§ 161, Teor.); quindi, se P è esterno alle due sfere, e PA_1, PA_2 sono due segmenti condotti da P, tangenti alle due sfere, i due triangoli rettangoli PO_1A_1, PO_2A_2 sono eguali, avendo le ipotenuse PO_1, PO_2 eguali e i cateti O_1A_1, O_2A_2 pure eguali; perciò è pure $PA_1 \equiv PA_2$.

Inversamente, se P è un punto tale, che i due segmenti PA_1, PA_2 condotti per esso tangenti alle due sfere sieno eguali, i triangoli rettangoli PO_1A_1, PO_2A_2, avendo i cateti rispettivamente eguali, sono eguali, e perciò $PO_1 \equiv PO_2$, ossia P è equidistante dai centri O_1 ed O_2; dunque P dev'essere situato sul piano α.

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere



https://www.geogebra.org/classic/twzgkqpf

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

215. Teorema. — *Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due circoli, non concentrici, del piano medesimo, sieno eguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due circoli, esterna ai cerchi limitati da essi.*

Essendo c_1, c_2 (Fig. 198) due circoli non concentrici di un piano, si facciano passare per essi, due superficie sferiche eguali e di raggio maggiore dei raggi dei due circoli dati, e sieno O_1', O_2' i centri di queste sfere. Allora il piano β, perpendicolare al segmento $O_1'O_2'$, nel suo punto medio, non può essere parallelo al piano α, poichè, se lo fosse, la retta dei centri delle due sfere, essendo perpendicolare al piano β per costruzione, sarebbe anche perpendicolare al piano α, e perciò i centri dei due circoli dati coinciderebbero, il che è escluso dall'ipotesi. Il piano β taglierà dunque il piano α secondo una retta r, che è il luogo geometrico dei punti del piano α, tali che sieno eguali i segmenti, condotti da essi, tangenti alle due sfere, e quindi anche quelli tangenti ai due circoli dati.

Le lezioni

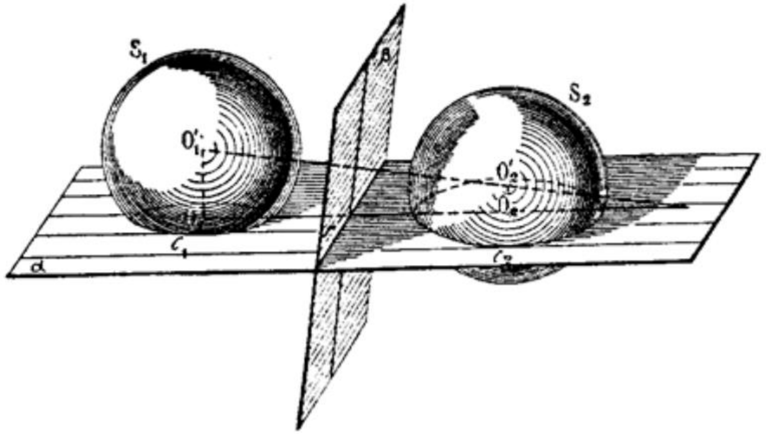
215. Teorema. — *Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due circoli, non concentrici, del piano medesimo, sieno eguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due circoli, esterna ai cerchi limitati da essi.*

Essendo c_1, c_2 (Fig. 198) due circoli non concentrici di un piano, si facciano passare per essi, due superficie sferiche eguali e di raggio maggiore dei raggi dei due circoli dati, e sieno O_1', O_2' i centri di queste sfere. Allora il piano β, perpendicolare al segmento $O_1'O_2'$, nel suo punto medio, non può essere parallelo al piano α, poichè, se lo fosse, la retta dei centri delle due sfere, essendo perpendicolare al piano β per costruzione, sarebbe anche perpendicolare al piano α, e perciò i centri dei due circoli dati coinciderebbero, il che è escluso dall'ipotesi. Il piano β taglierà dunque il piano α secondo una retta r, che è il luogo geometrico dei punti del piano α, tali che sieno eguali i segmenti, condotti da essi, tangenti alle due sfere, e quindi anche quelli tangenti ai due circoli dati.

Le lezioni

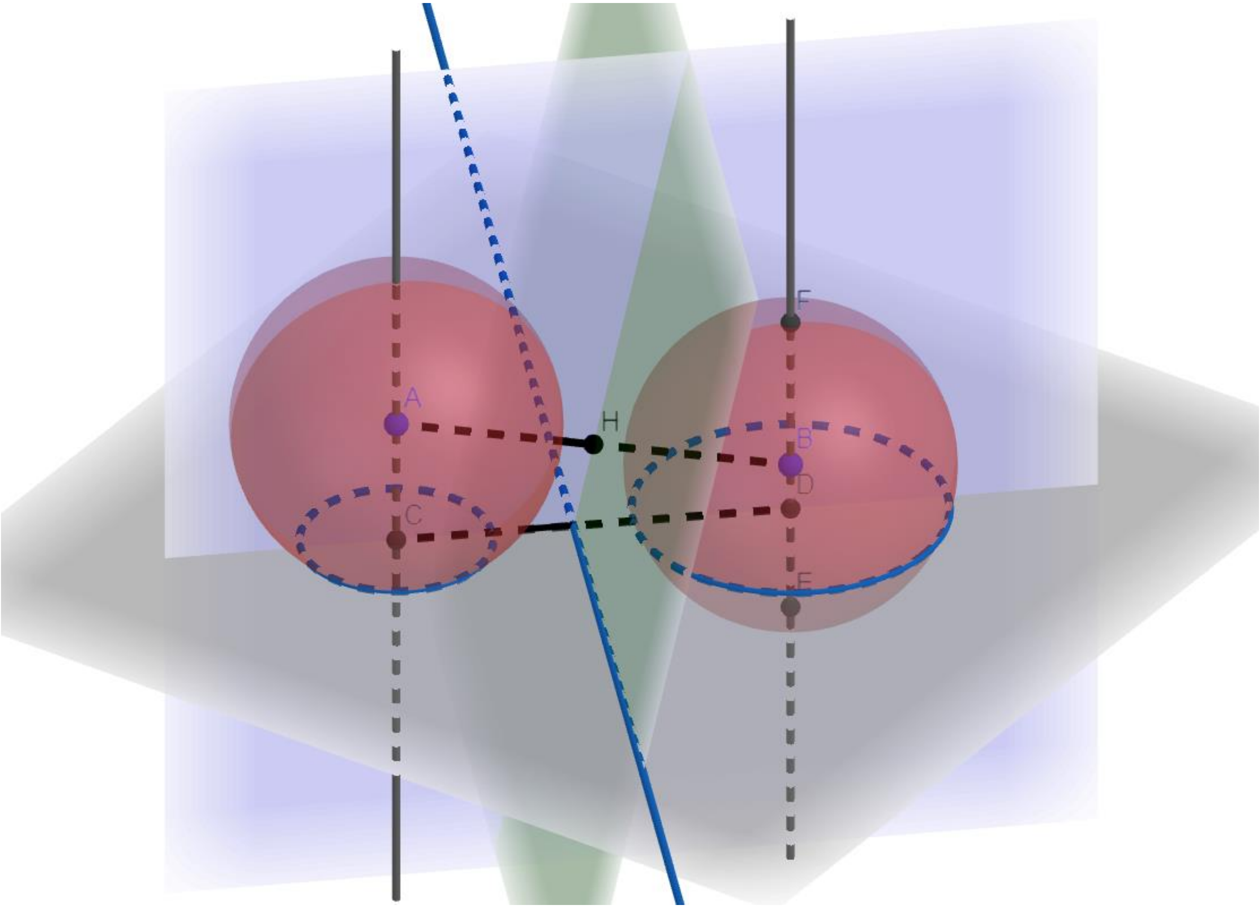
Sistemi di circoli e sfere

Dimostriamo ora che la retta r è perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2. Pertanto osserviamo che le perpendicolari al piano α, condotte per i centri O_1', O_2' delle due sfere S_1, S_2, incontrano questo piano nei centri O_1, O_2 dei circoli c_1, c_2, ed individuano un piano γ che è perpendicolare al piano α, e contiene le rette O_1O_2, $O_1'O_2'$. Ora anche il piano β è perpendicolare al piano γ, essendo perpendicolare alla retta $O_1'O_2'$ di questo piano, quindi (§ 65, Cor.) i piani α e β si tagliano secondo una retta r, che è perpendicolare a γ, e perciò perpendicolare anche alla retta O_1O_2 di questo piano.



Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere



https://www.geogebra.org/classic/qe5mnc5p

Le lezioni

216. Teorema. — *Dati tre circoli in un piano, tali che i loro centri non sieno in linea retta, i tre assi radicali di questi circoli, presi due a due, passano per uno stesso punto.*

Essendo c_1, c_2, c_3 i tre circoli dati in un piano α, in modo che i tre centri non sieno in linea retta, si facciano passare per essi, ciò che è sempre possibile, tre superficie sferiche eguali S_1, S_2, S_3 di raggio maggiore dei raggi dei tre circoli dati, e sieno O_1', O_2', O_3' i centri di queste sfere. I piani perpendicolari ai segmenti $O_1'O_2'$, $O_1'O_3'$, $O_2'O_3'$ nei loro punti di mezzo, tagliano il piano α secondo i tre assi radicali delle coppie di circoli c_1, c_2; c_1, c_3; c_2, c_3, ed inoltre passano per una medesima retta r (§ 161, Cor. 1°), che è il luogo geometrico dei punti equidistanti da O_1', O_2', O_3'. Evidentemente la intersezione r non può essere parallela al piano α, perchè, se lo fosse, i tre assi radicali dovrebbero essere paralleli fra loro (§ 40, Teor.), e quindi, contrariamente all'ipotesi, i centri dei tre circoli dati sarebbero in linea retta. Dunque la retta r incontra il piano α in un punto, il quale è comune a tutti e tre gli assi radicali.

Le lezioni

Centro radicale di tre circoli

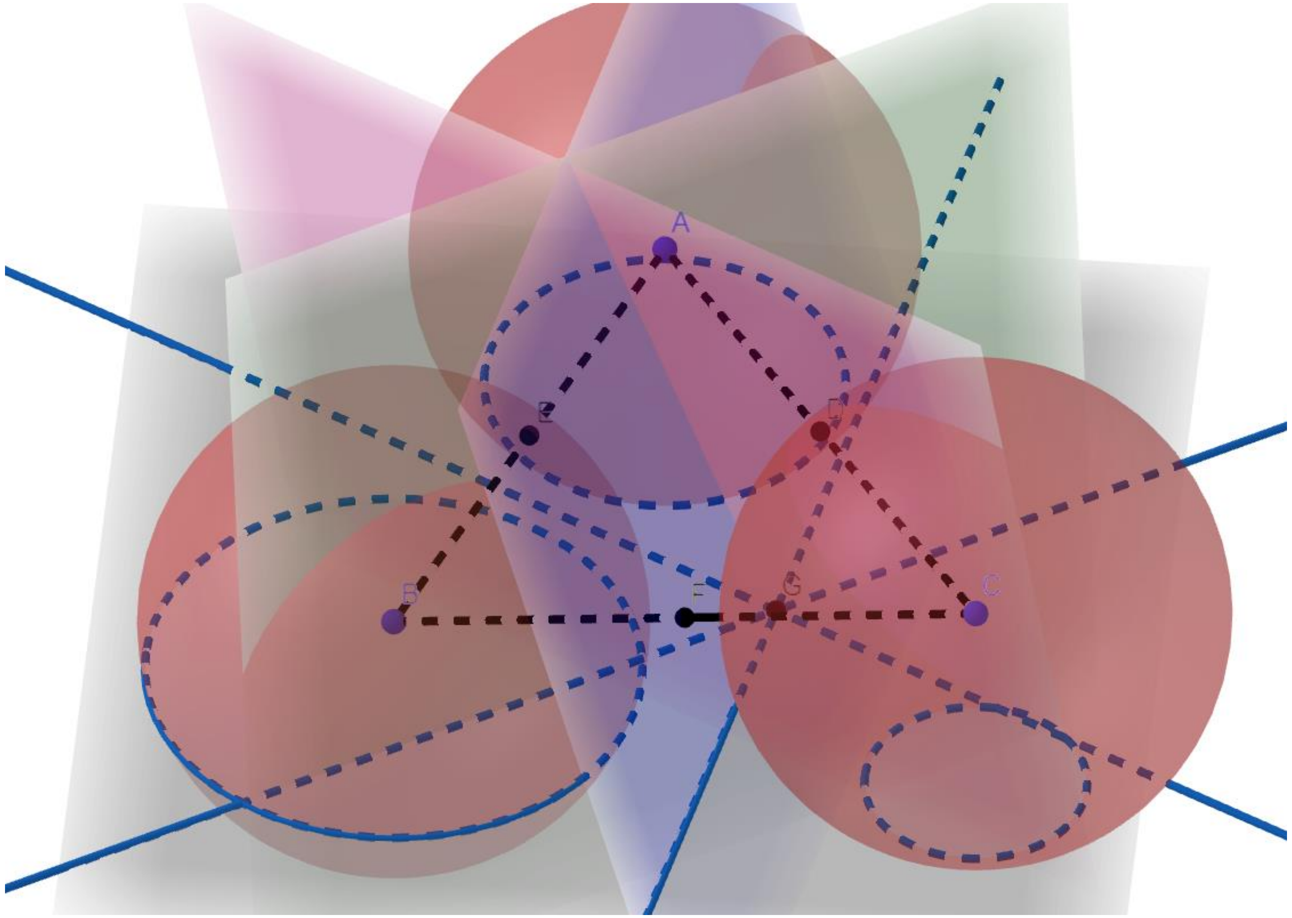
Sistemi di circoli e sfere

216. Teorema. — *Dati tre circoli in un piano, tali che i loro centri non sieno in linea retta, i tre assi radicali di questi circoli, presi due a due, passano per uno stesso punto.*

Essendo c_1, c_2, c_3 i tre circoli dati in un piano α, in modo che i tre centri non sieno in linea retta, si facciano passare per essi, ciò che è sempre possibile, tre superficie sferiche eguali S_1, S_2, S_3 di raggio maggiore dei raggi dei tre circoli dati, e sieno O_1', O_2', O_3' i centri di queste sfere. I piani perpendicolari ai segmenti $O_1'O_2'$, $O_1'O_3'$, $O_2'O_3'$ nei loro punti di mezzo, tagliano il piano α secondo i tre assi radicali delle coppie di circoli c_1, c_2; c_1, c_3; c_2, c_3, ed inoltre passano per una medesima retta r (§ 161, Cor. 1°), che è il luogo geometrico dei punti equidistanti da O_1', O_2', O_3'. Evidentemente la intersezione r non può essere parallela al piano α, perchè, se lo fosse, i tre assi radicali dovrebbero essere paralleli fra loro (§ 40, Teor.), e quindi, contrariamente all'ipotesi, i centri dei tre circoli dati sarebbero in linea retta. Dunque la retta r incontra il piano α in un punto, il quale è comune a tutti e tre gli assi radicali.

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere



https://www.geogebra.org/classic/seteczze

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

217. Problema. — *Costruire l'asse radicale di due circoli di un piano.*

Se i due circoli dati si tagliano, o sono tangenti, sappiamo che il loro asse radicale è la retta che unisce i punti comuni, o la tangente nel punto comune. Se poi i due circoli c_1, c_2 (Fig. 199) non si tagliano (cioè l'uno è esterno o interno all'altro) si descriva un terzo circolo c_3, che li tagli ambedue, e il cui centro non sia in linea retta coi centri dei circoli dati. Allora le due rette, che uniscono i punti d'incontro di questo circolo con l'uno e coll'altro dei due circoli dati, si tagliano in un punto P, che è il centro radicale dei tre circoli, e la perpendicolare, condotta da questo punto alla retta dei centri dei due circoli dati, sarà l'asse radicale dei medesimi.

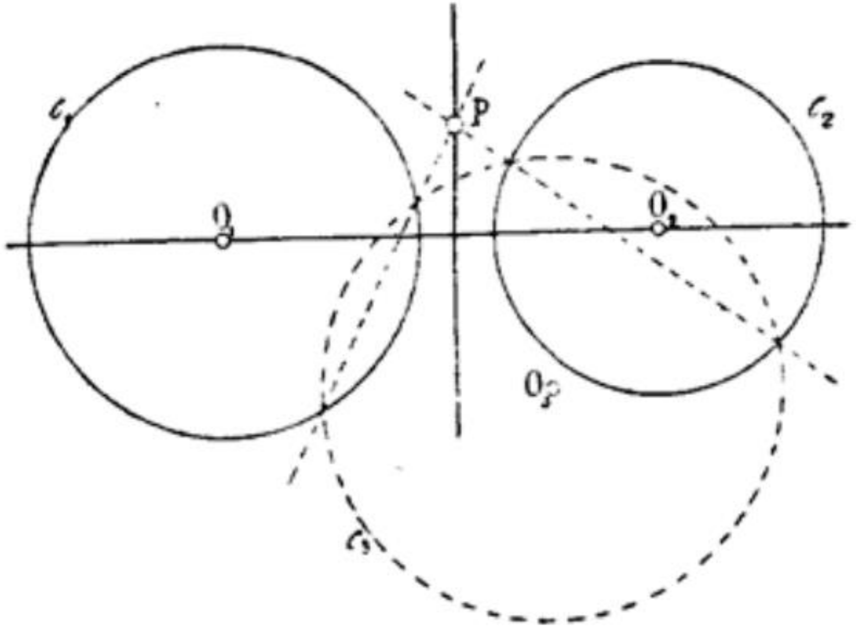
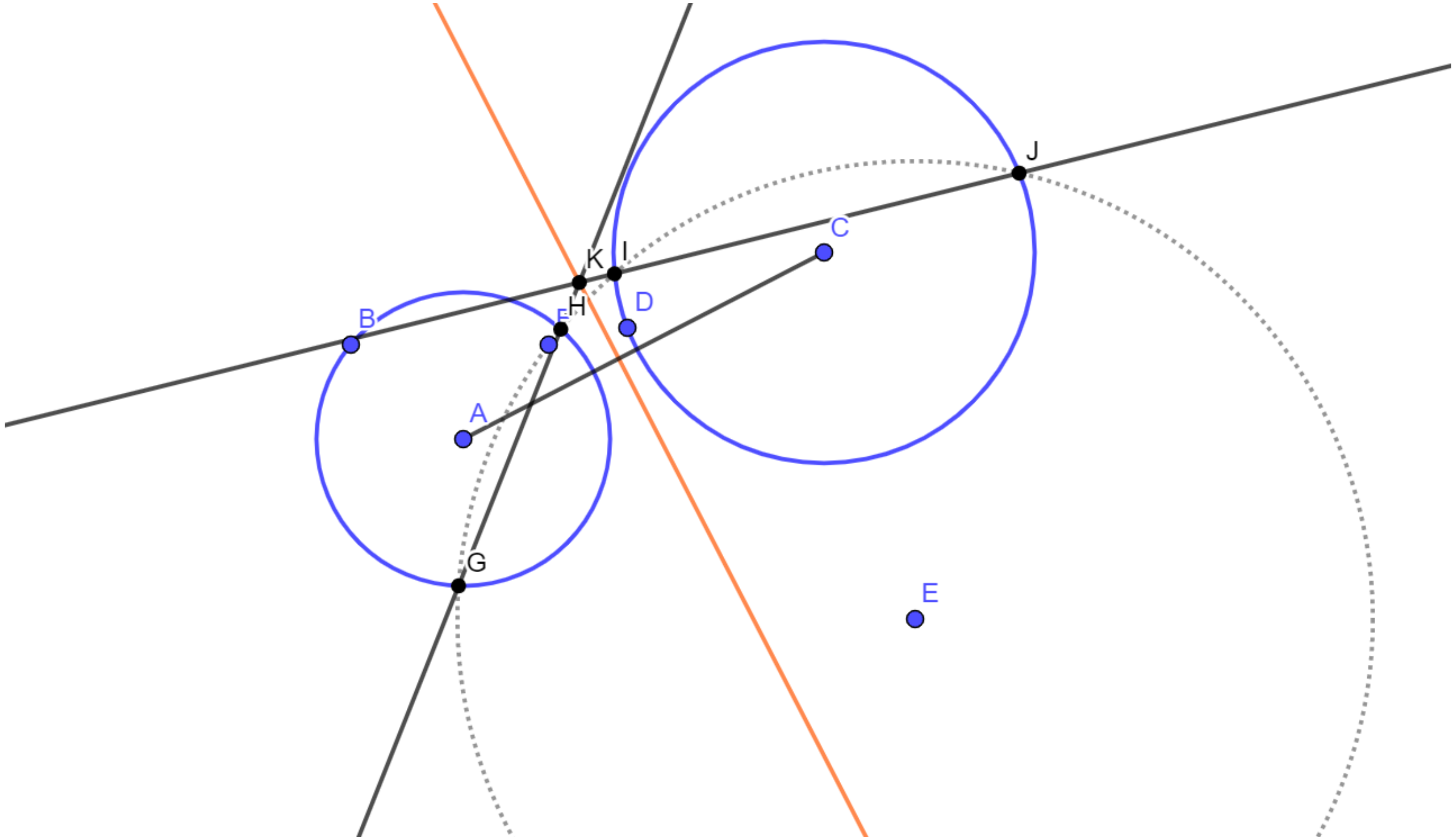


FIG. 199.

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere



https://www.geogebra.org/classic/sfyxsmar

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

218. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due superficie sferiche non concentriche, sieno eguali, è la parte di un piano, perpendicolare alla retta dei centri delle due sfere, esterna ad esse.*

Essendo S_1, S_2 le due sfere date, O_1, O_2 i loro centri, si conduca un piano α per la retta O_1O_2; esso taglia le due superficie sferiche secondo due circoli massimi c_1, c_2, aventi per asse radicale una retta r perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2. Facendo rotare il piano α di un mezzo giro attorno alla sua retta O_1O_2, evidentemente i circoli c_1, c_2 descrivono le superficie sferiche S_1, S_2, e la retta r descrive un piano perpendicolare alla O_1O_2, che è il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle due superficie sferiche, sono eguali.

Le lezioni

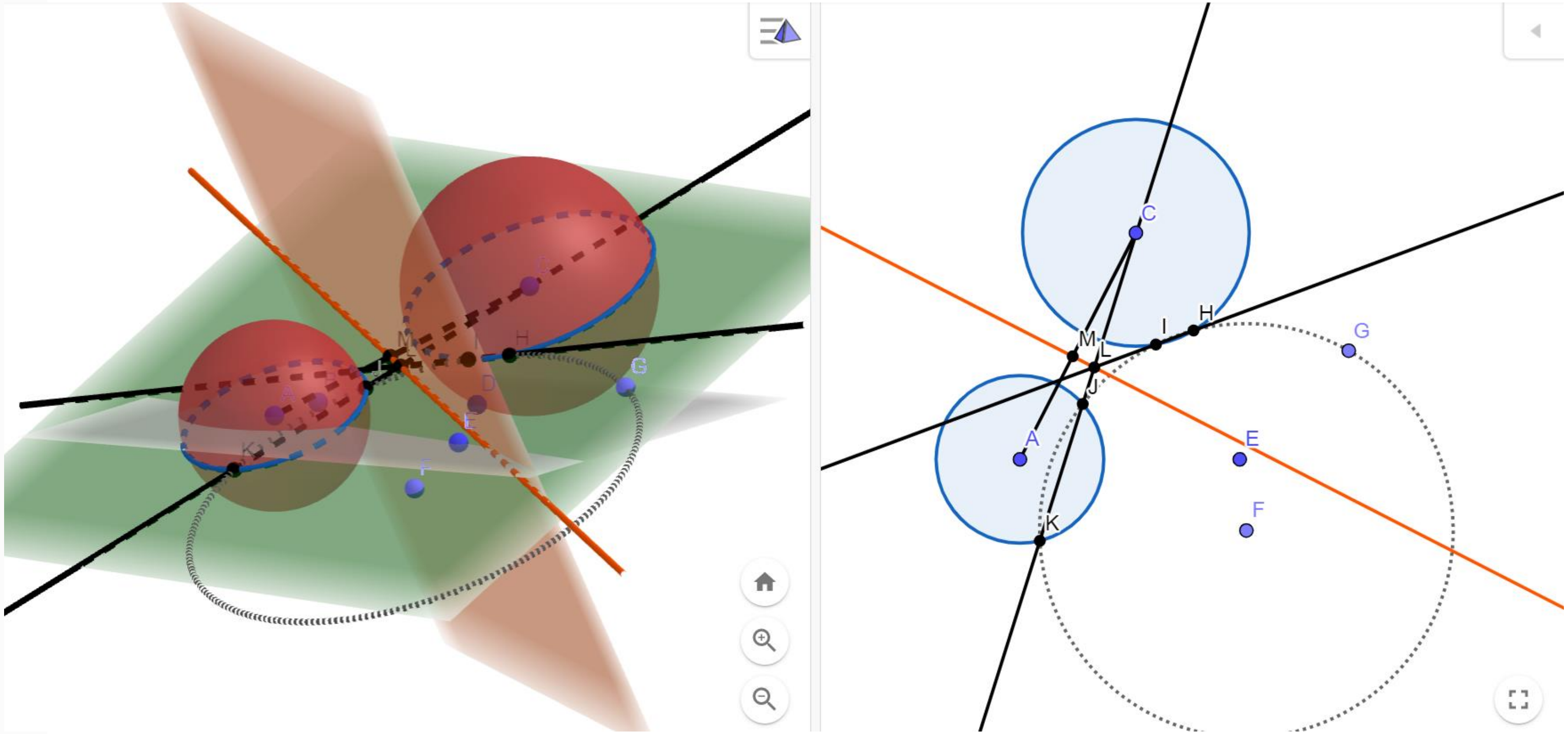
Sistemi di circoli e sfere

218. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due superficie sferiche non concentriche, sieno eguali, è la parte di un piano, perpendicolare alla retta dei centri delle due sfere, esterna ad esse.*

Essendo S_1, S_2 le due sfere date, O_1, O_2 i loro centri, si conduca un piano α per la retta O_1O_2; esso taglia le due superficie sferiche secondo due circoli massimi c_1, c_2, aventi per asse radicale una retta r perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2. Facendo rotare il piano α di un mezzo giro attorno alla sua retta O_1O_2, evidentemente i circoli c_1, c_2 descrivono le superficie sferiche S_1, S_2, e la retta r descrive un piano perpendicolare alla O_1O_2, che è il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle due superficie sferiche, sono eguali.

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

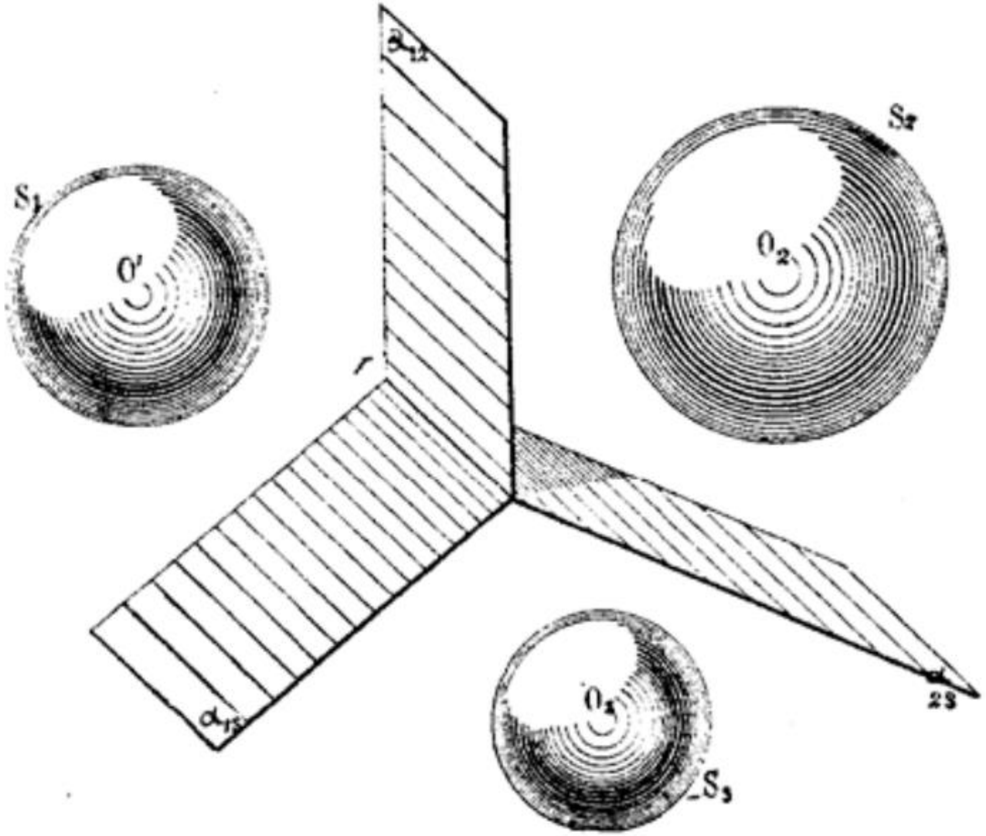


https://www.geogebra.org/classic/pzwercmn

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

219. Teorema. — *Date tre superficie sferiche, i cui centri non sieno in linea retta, i tre piani radicali di queste superficie, prese due a due, passano per una stessa retta perpendicolare al piano dei loro centri.*

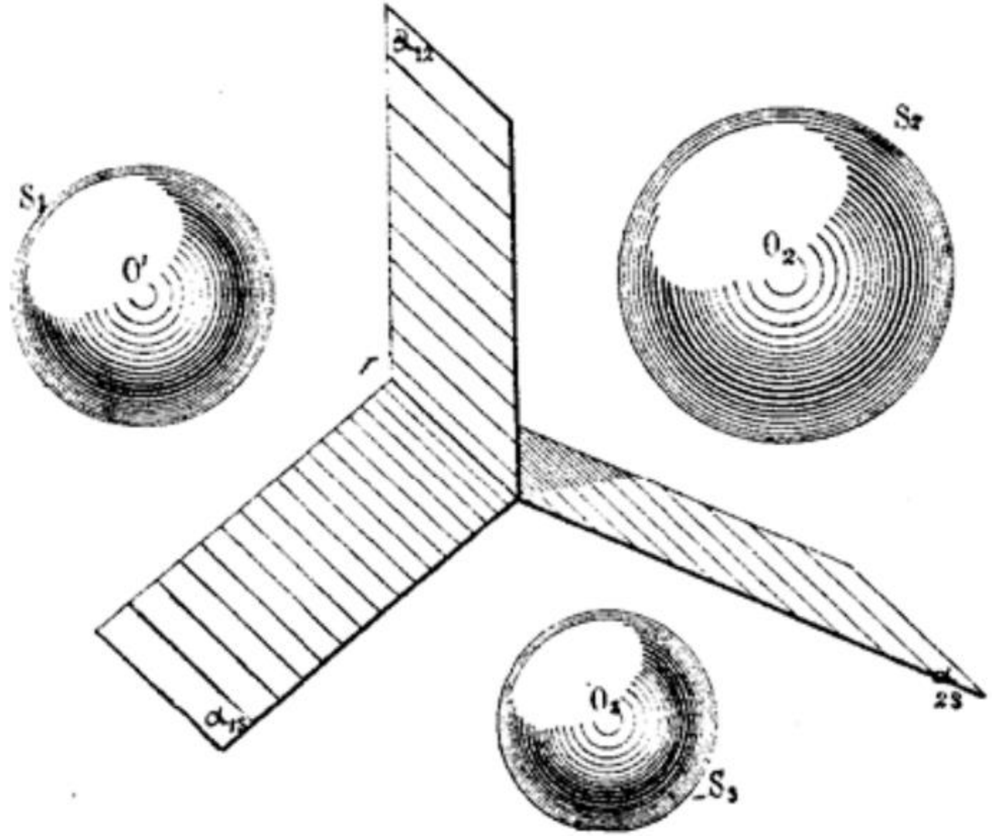


Asse radicale di tre superfici sferiche

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

219. Teorema. — *Date tre superficie sferiche, i cui centri non sieno in linea retta, i tre piani radicali di queste superficie, prese due a due, passano per una stessa retta perpendicolare al piano dei loro centri.*



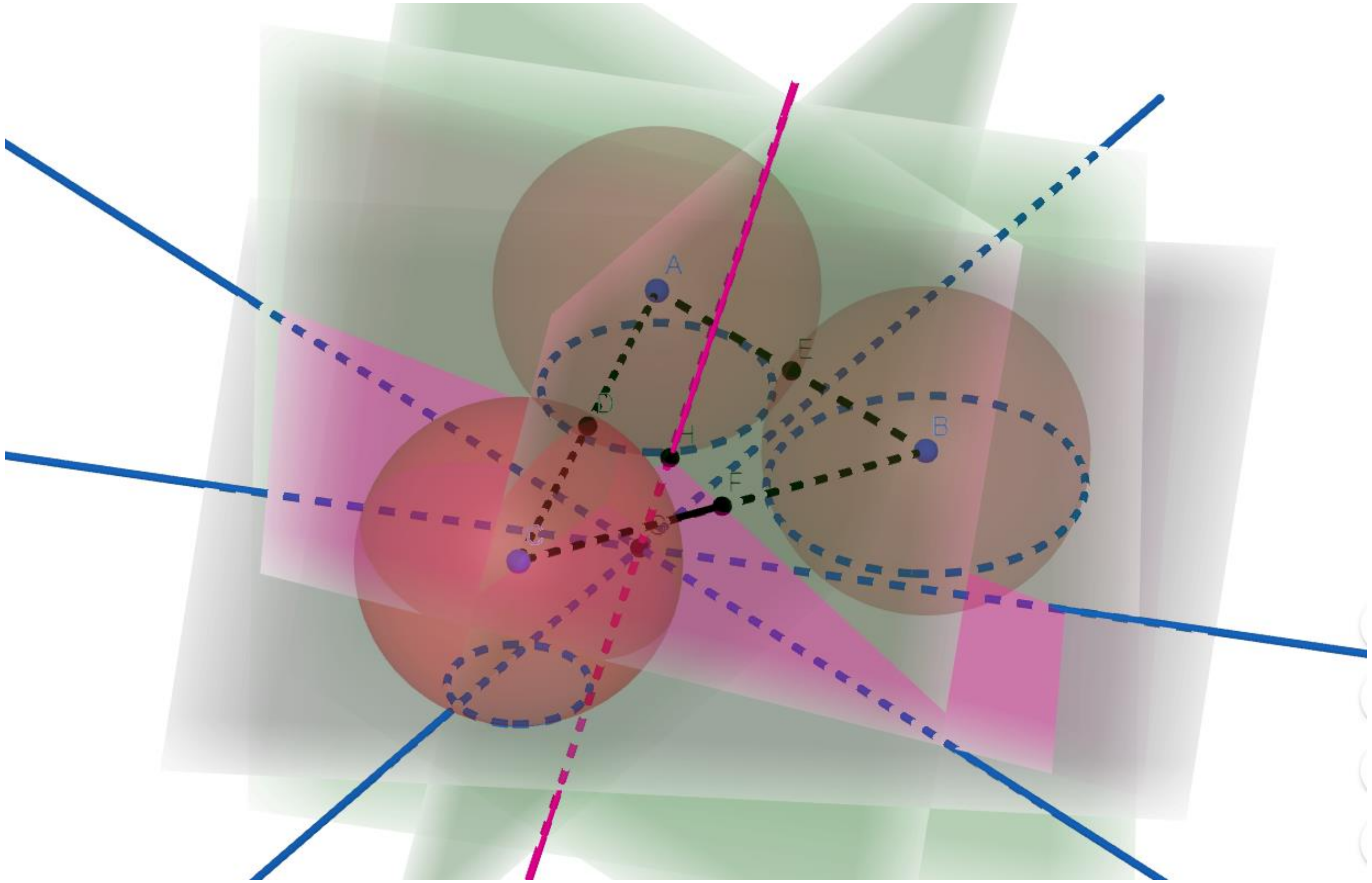
Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere

Sieno (Fig. 218) S_1, S_2, S_3 le tre superficie sferiche date. O_1, O_2, O_3 i loro centri, non situati sopra una medesima retta, ed α_{12}, α_{13}, α_{23} i piani radicali delle coppie di superficie sferiche S_1, S_2; S_1, S_3; S_2, S_3. Sappiamo (§ 218, Cor. 1°), che i piani radicali α_{12}, α_{13} sono rispettivamente perpendicolari alle rette O_1O_2, O_1O_3, e perciò si tagliano secondo una retta, la quale è perpendicolare al piano $O_1O_2O_3$, ed è tale che i segmenti tangenti alle tre superficie sferiche, condotti per ciascuno de'suoi punti, esterno ad esse, sono eguali. Siccome i segmenti tangenti condotti dai punti di questa retta alle due superficie S_2, S_3 sono eguali, essa dovrà giacere anche sul piano radicale α_{23} di queste due superficie, e quindi tutti i tre piani radicali passano per la stessa retta perpendicolare al piano dei centri delle tre superficie sferiche.

Le lezioni

Sistemi di circoli e sfere



[219_Teorema - GeoGebra]

Le lezioni

Relazioni tra rette, piani e sfere

- Paragrafo 215 (asse radicale di due circoli)
- Paragrafo 218 (piano radicale di tre superfici sferiche)
- Paragrafo 216 (centro radicale di tre circoli)
- Paragrafo 215 (asse radicale di tre superfici sferiche)

Bibliografia

- Borgato, M. T. (2016). Il fusionismo: moda didattica o riflessione sui fondamenti della geometria? *Periodico di Matematiche*, s. XII 8(2), 45-65.
- Lazzeri, G, Bassani, A. (1891), *Elementi di geometria: libro di testo per la R. Accademia Navale*, Livorno: Giusti, (2a ed 1898).