



Bolle di sapone e altri problemi di minimo



Liceo Matematico

Convegno tematico: “Matematica e Storia”

FERRARA, 10-11 dicembre 2020

PROF.SSA BERTAZZINI MICHELA

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proposta di percorso interdisciplinare

Il percorso proposto è pensato per la **classe III** (Scuola Secondaria di I grado)

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Nella realizzazione del percorso si sono seguiti i seguenti principi generali:

- **Stimolare**

Si iniziano tutte dall'osservazione di fenomeni come punto di partenza per porsi delle domande.

- **"Fare", ovvero attività sperimentale**

Un antico detto popolare dice: "Se sento, dimentico, se vedo, ricordo, se faccio, imparo" . Gli studenti vivono l'esperienza in prima persona attraverso una serie di **laboratori**.

- **Collegamenti storico – epistemologici**

Si ritiene importante l'approccio storico-epistemologico, laddove non diventi un "peso" ma un'opportunità di capire meglio l'argomento attraverso il processo storico che ha condotto a quella particolare scoperta.

Considerazioni didattiche

- **Interdisciplinarietà**

L'argomento "Le bolle di sapone", costituisce un'occasione per affrontare in modo naturale temi di fisica, chimica e matematica per quanto riguarda le scienze e consente anche, agganci con l'architettura, la biologia, l'arte e molto ancora.

- **Il racconto**

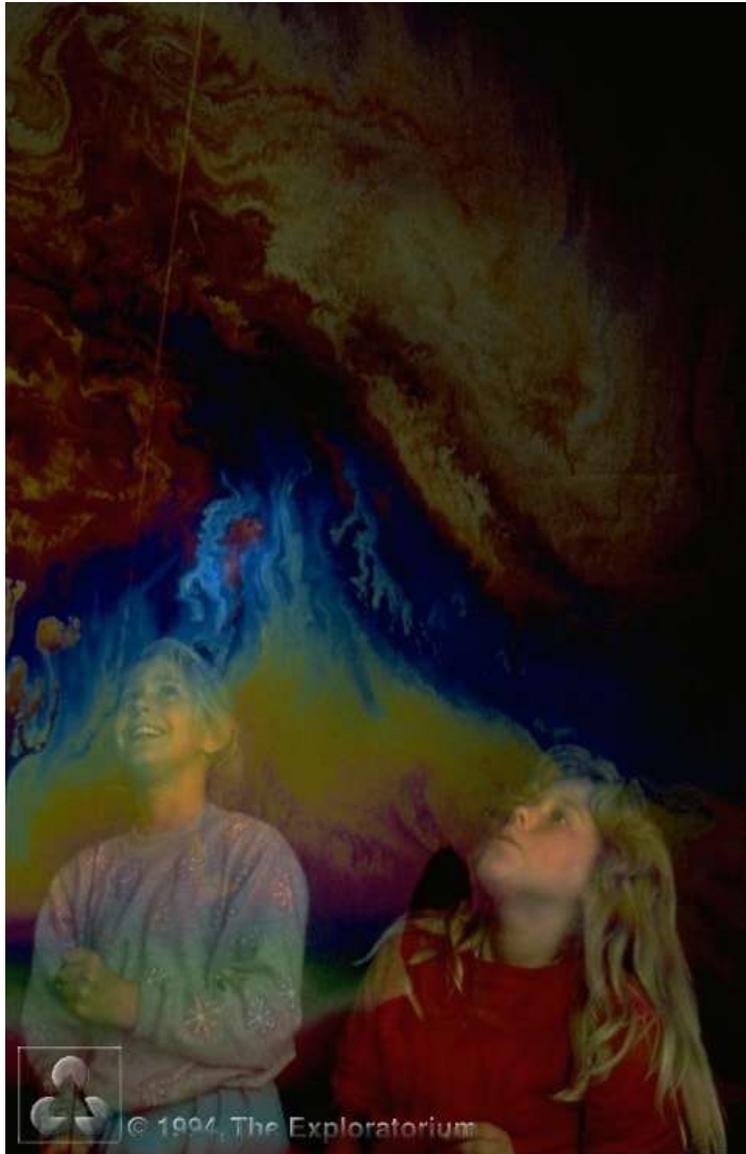
Si è cercato di inserire collegamenti storici, aneddoti strani e stravaganti (Guinness dei primati), collegamenti con altre discipline che possano aumentare l'interesse degli studenti.

- **Socializzazione**

Infine ricordiamo che i laboratori sono momenti che favoriscono la socializzazione, il lavoro di gruppo e quindi un'occasione per stimolare all'operare insieme nel rispetto reciproco. L'attività laboratoriale è anche una pratica che permette a ragazzi che hanno difficoltà con la lingua italiana e che quindi non riescono a seguire la lezione dialogata in classe, di partecipare attivamente.



Bolle di sapone e altri problemi di minimo



1. Perché le bolle hanno forma sferica?

Didone e la proprietà isoperimetrica del cerchio. Principio di minimizzazione

2. Il commesso viaggiatore

Se si vuole costruire un'autostrada per collegare un certo numero di città, qual è il tracciato più breve?

3. Laboratori

Lamine di sapone: che passione! - Schiume e geometria di Plateau

4. Collegamenti e approfondimenti

Fisica (La tensione superficiale) - Chimica (I tensioattivi) - Architettura - Arte - Disegno tecnico - Aspetti storico/epistemologici - Curiosità.

Bolle di sapone e altri problemi di minimo



"... Credo che non ci sia nessuno in questa stanza che non abbia fatto qualche volta una comune bolla di sapone, e che, ammirandone la forma perfetta e la meravigliosa lucentezza dei colori, non si sia chiesto come fosse possibile fare tanto facilmente un oggetto così splendido ...

... in una comune bolla di sapone c'è molto di più di quanto immagini di solito chi si limita a considerarla un gioco"

Charles Vernon Boys

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Perché le bolle hanno forma sferica?

Si potrebbe pensare che dipenda dalla forma del telaio che viene usato per crearle.

Proviamo a fare telai di forma diverse e vediamo come vengono le bolle!!!

Questo semplice **controesempio** mostra che la forma sferica della bolla non dipende dal telaio utilizzato per crearla!!!

La forma della bolla non dipende dal telaio!!!!

Allora da cosa dipende???

Per rispondere a questa domanda partiamo da una storia lontana ...



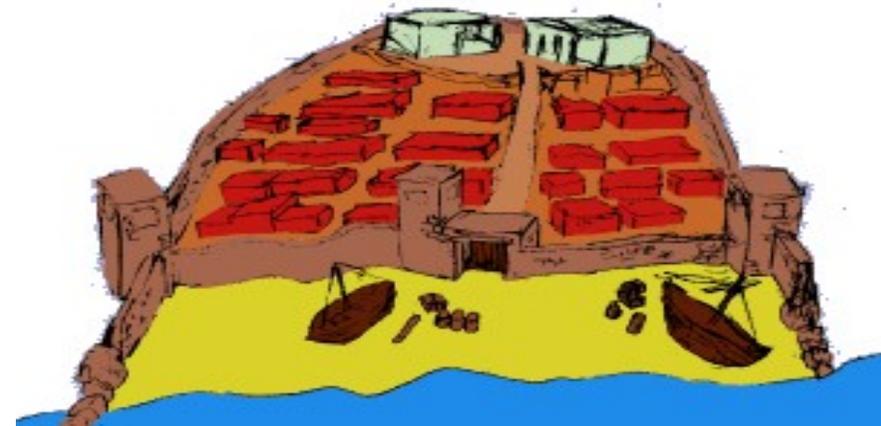
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Cartagine e la regina Didone

"... Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai/ sorgere la gran cittade e l'alta rocca/ de la nuova Cartago, che dal fatto/ Birsa no mossi, per l'astuta merce/ che, per fondarla, fèr di tanto sito/ quanto cerchiar di bue potesse in tergo" (Eneide: libro 1, 360-368)



La leggenda a cui allude Virgilio è quella secondo cui Didone, arrivata in Africa, chiese al potente Iarba, re dei Gentili, un tratto di terra per potervi costruire una città. Il re non volendogliela concedere, le assegnò in segno di scherno tanta terra quanta ne potesse circondare con la **pele di un bue**. L'astuta Didone tagliò la pelle in strisce sottilissime e si vide assegnata tutta la terra, affacciata sul mare, che poté circondare con le striscioline attaccate una all'altra. Così fondò **Cartagine**.



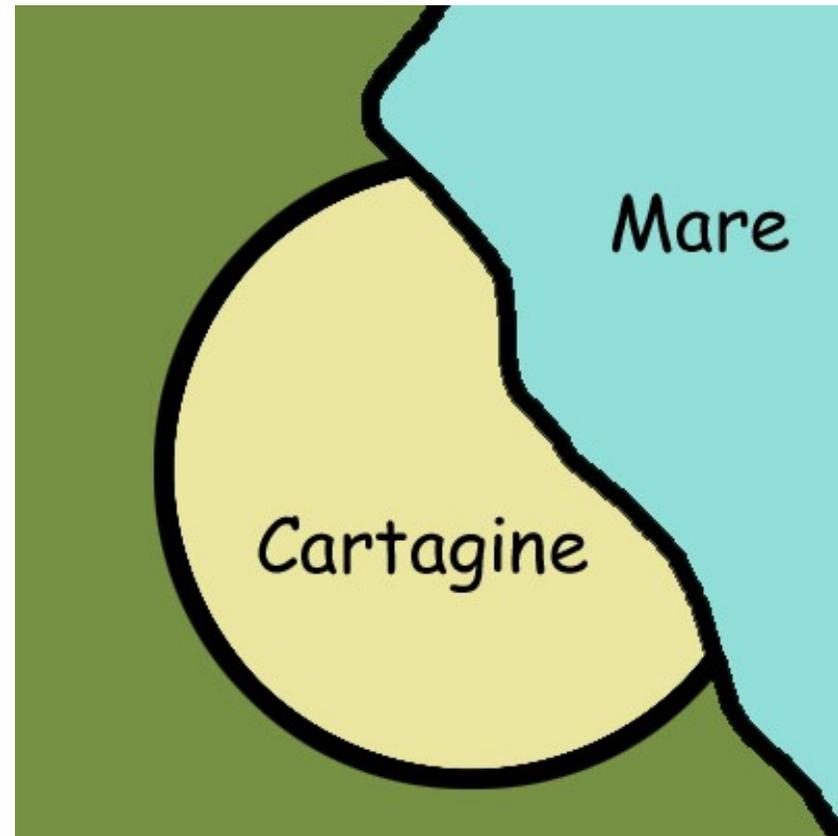
Cartagine e la regina Didone

Perché Didone fu astuta?

Sicuramente perché pensò di tagliare la pelle di bue in strisce sottilissime con cui circondare un pezzo di terra.

Ma non solo!

Didone **non** disegnò **una forma qualsiasi** con il cordone che creò, ma disegnò un **cerchio** (o meglio un semicerchio perché voleva che la città Cartagine si affacciasse sul mare).



Cartagine e la regina Didone

I matematici pensano che Didone fosse a conoscenza (una conoscenza empirica, basata sull'esperienza) di una proprietà della circonferenza: la proprietà *isoperimetrica del cerchio*, e che la sfruttò a proprio vantaggio.

Iso = uguale quindi *isoperimetrico* significa di ugual perimetro

Proprietà isoperimetrica del cerchio



"Fra tutte le figure piane aventi perimetro dato, il cerchio ha l'area maggiore"

Consideriamo delle figure che hanno lo stesso perimetro; è facile realizzarle: basta prendere come contorno un pezzo di spago e disporlo in vari modi, a quadrato, a triangolo, a cerchio, a ... Come varia l'area fra le figure di ugual perimetro?



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica



Provare a disegnare una forma qualsiasi con questo nastro. Per misurare l'area, provare a vedere quante palline (non sovrapposte) si riescono ad inserire.

Si nota che più palline si vogliono inserire più la figura tende a diventare una circonferenza.

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica

Se, invece di considerare tutte le figure piane, ci si limita a considerare solo i rettangoli, qual è la soluzione del problema ?



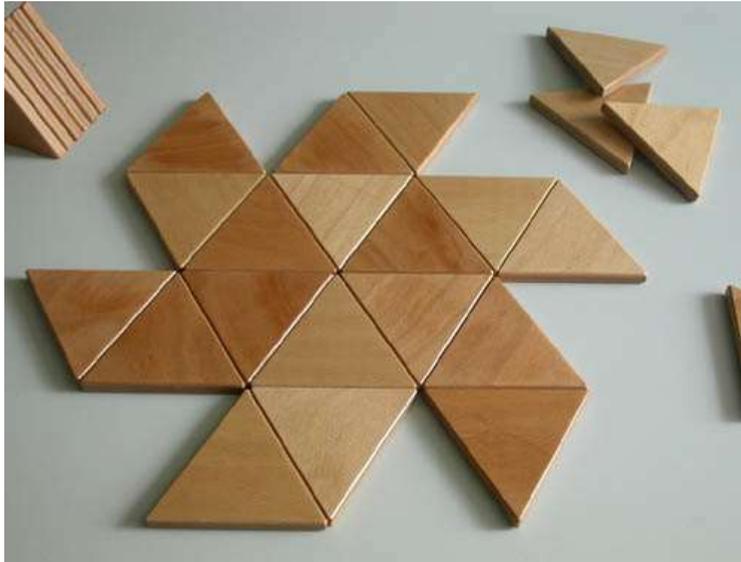
È facile verificare, attraverso alcuni esempi, che

Fra tutti i rettangoli di perimetro fissato, il quadrato è quello di area massima.

GeoGebra

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica



Utilizzando delle tessere a forma di triangolo equilatero, si può provare a risolvere la versione "**simmetrica**" dello stesso problema:

Tra tutte le figure che hanno una determinata area, qual è quella di perimetro minore?

Le soluzioni sembrano rispondere ad un ipotetico "**principio della maggior circolarità possibile**".

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica

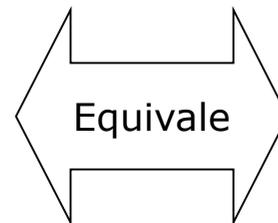
Abbiamo verificato che tra tutti i rettangoli di perimetro fissato, il quadrato è quello con area massima. Questo fatto si può anche esprimere in forma simmetrica:

Fra tutti i rettangoli di area fissata, il quadrato ha perimetro minimo

The GeoGebra logo, consisting of the word "GeoGebra" in a sans-serif font with a small cluster of blue dots between the 'o's, all enclosed in a solid orange rectangular border.

In generale vale la seguente proprietà:

Fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati di ugual area, il poligono regolare è quello che ha perimetro minimo.



Fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati di ugual perimetro, il poligono regolare quello che ha area massima.

Questo significa che: (ripetere ogni enunciato anche nella forma simmetrica)

- 1) Fra tutti i triangoli di area fissata, il triangolo equilatero è quello che ha il perimetro minimo;
- 2) Fra tutti i quadrilateri di area fissata, il quadrato è quello di perimetro minimo;
- 3) Fra tutti i pentagoni di area fissata, il pentagono regolare è quello di perimetro minimo

...

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica

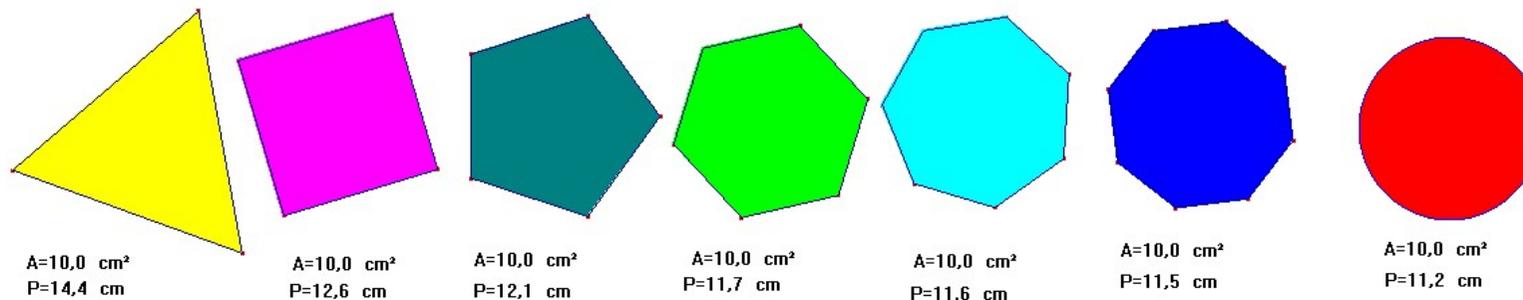
Abbiamo visto che a parità di area e di numero di lati, i poligoni regolari sono quelli che rendono minimo il perimetro. Ci chiediamo ora:

A parità solo di area, potendo utilizzare un numero qualsiasi di lati, qual è il poligono con perimetro minimo?

Per quanto osservato precedentemente, possiamo limitarci a considerare solo i poligoni regolari.

Con **GeoGebra**, si può verificare che a parità di area, più lati ha il poligono regolare, meno misura il suo perimetro.

Questo ci conduce intuitivamente al concetto di numero infinito di lati, verso il concetto di approssimazione della **circonferenza**.



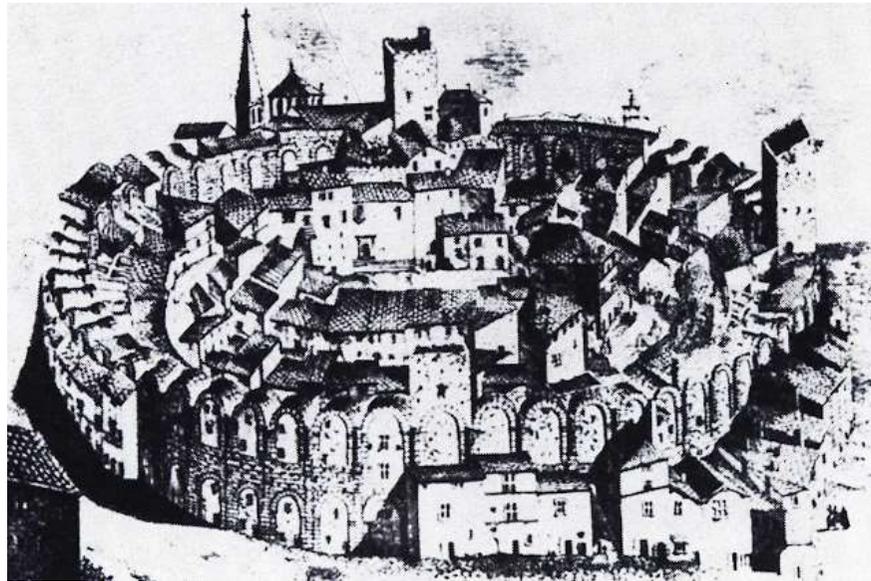
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica

La proprietà del cerchio di avere perimetro minimo a parità di area, è stata forse utilizzata nel Medioevo, sempre nella costruzione delle città.

Non sono poche infatti le città, di quel periodo, che presentano forma circolare.

La ragione era probabilmente, quella di risparmiare sulla lunghezza delle mura di cinta e, nello stesso tempo, di poter sorvegliare meglio gli attacchi dall'esterno.



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica

Alla luce di quanto detto, possiamo ora rispondere alla questione analoga nello spazio.

**Costruire parallelepipedi di
ugual volume lavorando con
cubi**

Si utilizzano 8 cubetti uguali.

Si possono costruire 3
parallelepipedi di ugual volume ma
con superfici diverse.

**A parità di
volume, il cubo
ha la superficie
minima**



32 facce



28 facce



24 facce

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Proprietà isoperimetrica

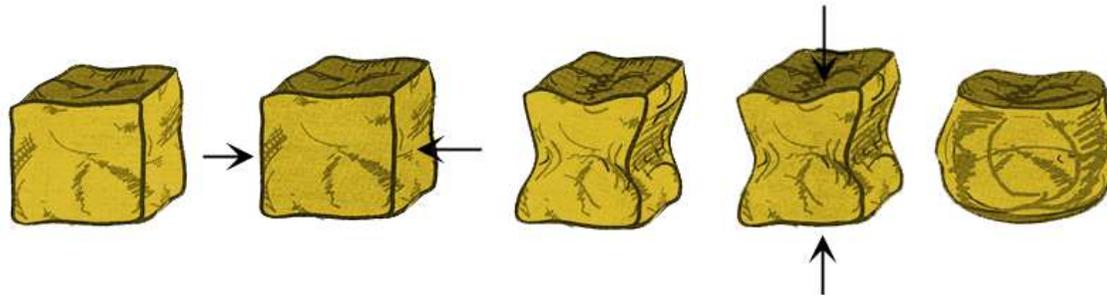
Costruire solidi di ugual volume lavorando con l'argilla

Abbiamo visto che a parità di volume il cubo presenta la superficie minima fra i parallelepipedi.

Ci chiediamo: fra i solidi che hanno lo stesso volume ma forme diverse, qual è quello di superficie minima? Lavoriamo con l'argilla



Costruiamo prima un cubo. Poi per rendere l'argilla "più compatta", comprimiamo il cubo esercitando pressioni orizzontali (si alza) e verticali (si allarga) ... continuando così si nota che via via, ad ogni compressione, il solido va "rotondeggiandosi" sempre di più. Si "sente" che si arriverà ad una **sfera**.



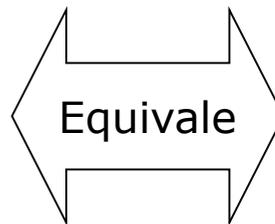
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

La Divina Sfera



Così come il cerchio possiede la proprietà isoperimetrica nel piano, la sfera la possiede nello spazio tridimensionale.

Cioè a parità di superficie esterna il solido che contiene il maggior volume è la sfera



Assegnato un volume da contenere, la sfera è quel solido che contiene quell'assegnato volume con la minor superficie esterna.

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Il principio di minimizzazione

La domanda iniziale era: **perché le bolle hanno forma sferica?**

Le bolle seguono il **principio fisico di minimizzazione**, una legge di "sforzo minimo". Un comportamento diffusissimo in fisica che spiega perché le palle rotolano giù per un pendio e le molle tendono a ritornare nella loro posizione di equilibrio.



In una bolla di sapone la **tensione superficiale** tende sempre a minimizzare la superficie:

per una data quantità di volume d'aria (quello da noi soffiato) la forma con la superficie più piccola è la sfera.

Collegamento
a **Scienze**

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Al Polo Nord



A parità di volume interno la superficie è minima quindi minore dispersione.

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Il commesso viaggiatore

La matematica è irragionevolmente utile. (Roger Penrose)



Se si vuole costruire un'autostrada per collegare Milano, Venezia e Bologna, supponendo di riuscire a costruirla in linea retta, senza impedimenti o ostacoli. Qual è il tracciato più breve?

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Il commesso viaggiatore

Obiettivo: Fare notare come con le lamine saponose è possibile trovare il cammino di lunghezza minima che unisce tra loro punti del piano.

Materiale: Tavolette quadrate di plexiglass uguali a due a due – viti filettate – soluzione saponosa.

Procedimento: Prendere due tavolette di plexiglass di uguale grandezza, sovrapporle e fissare le viti quanti sono i punti che si vogliono collegare facendo sì che tra le tavolette si crei uno spazio di circa 3, 4 mm. In un telaio, utilizzando la cartina dell'Italia del nord, disporre le viti in modo che i vertici siano sovrapposti alle tre città (Bologna – Milano – Venezia). Immergere questi telai nella soluzione saponosa.

Cosa fa notare: Quando si estrae il telaio dalla soluzione, le lamine saponate si dispongono per collegare fra loro le viti realizzando percorsi minimi. (**Principio di minimizzazione**).



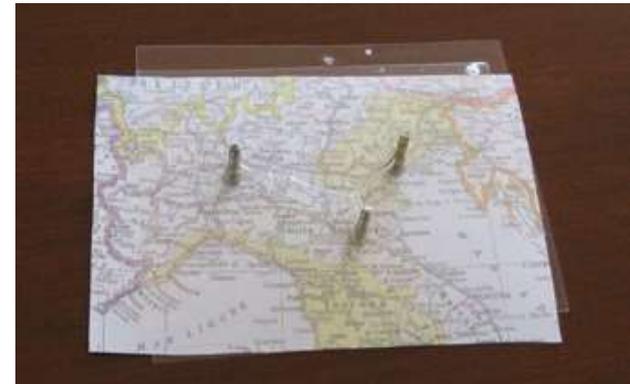
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Il commesso viaggiatore

Reti elettriche, telefoniche, stradali, ferroviarie, reti con cui veniamo a contatto praticamente ogni giorno, possono essere viste come un insieme di linee che si incrociano in vari modi, collegando fra loro diversi punti.

Qual è il tracciato più breve per collegare un certo numero di punti? La risposta è semplice se i punti fissati sono due: un segmento di linea retta risolve il problema, ma se i punti sono tre o quattro?

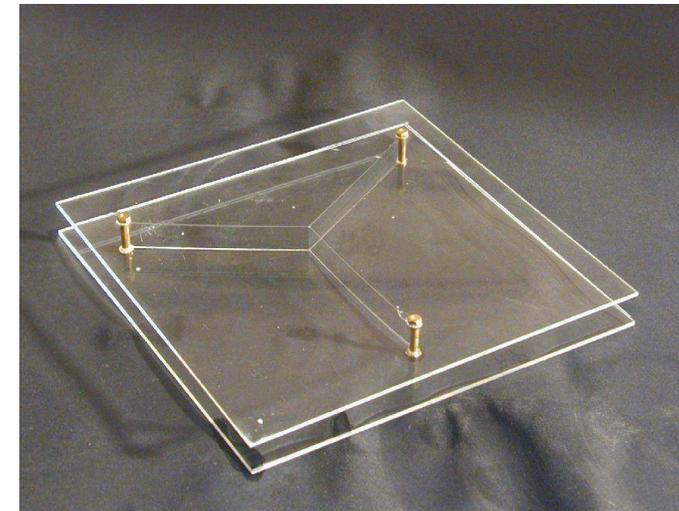
La risposta si può avere empiricamente usando una pellicola insaponata, essa indica automaticamente il percorso giusto, attaccandosi su un plastico a piccola scala che riproduce la distribuzione geografica dei vari punti.



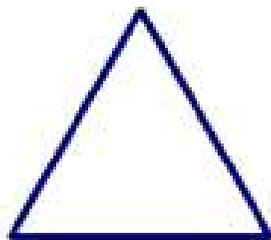
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Il commesso viaggiatore

Configurazione delle lamine quando le viti si trovano ai lati di un triangolo equilatero:



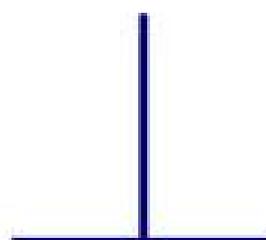
Lato= 4:



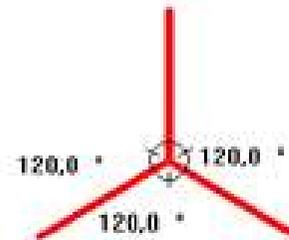
Risultato: 12,00 cm



Risultato: 8,00 cm



Risultato: 7,46 cm



Risultato: 6,93 cm

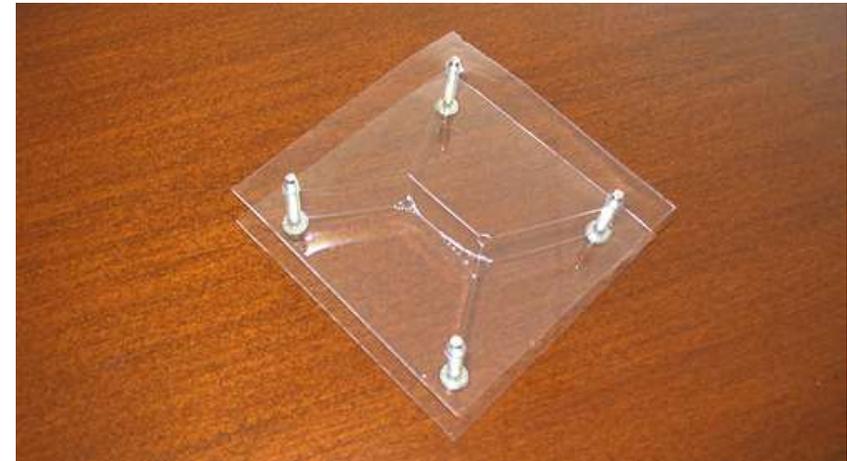
Realizza alcune tavole di disegno tecnico con l'aiuto del docente di **Tecnologia**

GeoGebra

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Il commesso viaggiatore

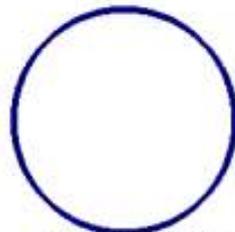
Configurazione delle lamine quando le viti si trovano ai lati di un quadrato:



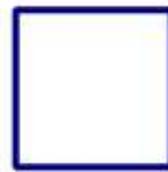
Lato= 3



Risultato: 20,49 cm



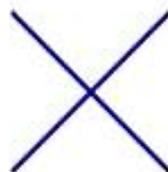
Risultato: 13,33 cm



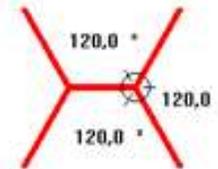
Risultato: 12,00 cm



Risultato: 9,00 cm



Risultato: 8,49 cm



Risultato: 8,20 cm

Realizza alcune tavole di disegno tecnico con l'aiuto del docente di **Tecnologia**

GeoGebra

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Lamine di sapone: che passione!



Con il filo di ferro si possono realizzare telai con cui è possibile “giocare” e realizzare **superfici minime**.

Osserva e disegna le superfici minime con l'aiuto del docente di **Arte e immagine**



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Lamine di sapone: che passione!

Bolle a spirale

Con un piatto di plastica e 30 cm di filo puoi realizzare una bellissima bolla a spirale.

- Taglia a spirale il piatto, avvicinandoti al centro un centimetro ogni giro;
- Con la pinzatrice fissa il filo alle due estremità, lasciando liberi 5 cm
- Immergi la spirale nella soluzione saponata e tira i due estremi del filo dolcemente.

Che forma assume la pellicola di sapone?



Bolle di sapone e altri problemi di minimo



Le prime
e più
famose
superfici
minime

Catenoide: superficie di rotazione, che viene ottenuta ruotando una particolare curva piana, detta **catenaria**, intorno ad un asse (perpendicolare all'asse di simmetria della curva). Scoperta da **Eulero nel 1744**.



Elicoide: ottenuta ruotando una retta attorno ad un asse a lei perpendicolare e traslandola contemporaneamente lungo l'asse. Scoperta da **nel 1776 Meusnier**.

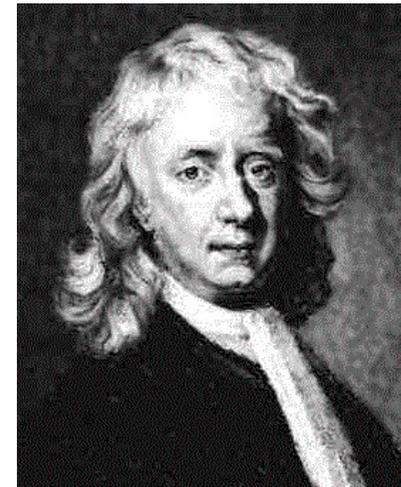
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Gli scienziati delle bolle



Sin dagli albori della scienza ci si è occupati di bolle di sapone. Il primo fu **Archimede** (287-221 a. c.), che osservò come fra tutti i solidi con la stessa superficie, la sfera sia quello che contiene il maggior volume (Proprietà isoperimetrica della sfera).

Si arriva al **1704** quando **Isaac Newton** descrisse in dettaglio il colore che si osserva sulle lamine di sapone.

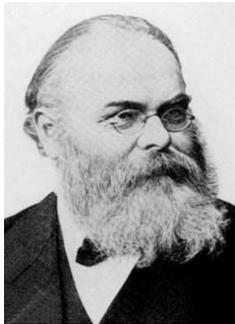


Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Gli scienziati delle bolle



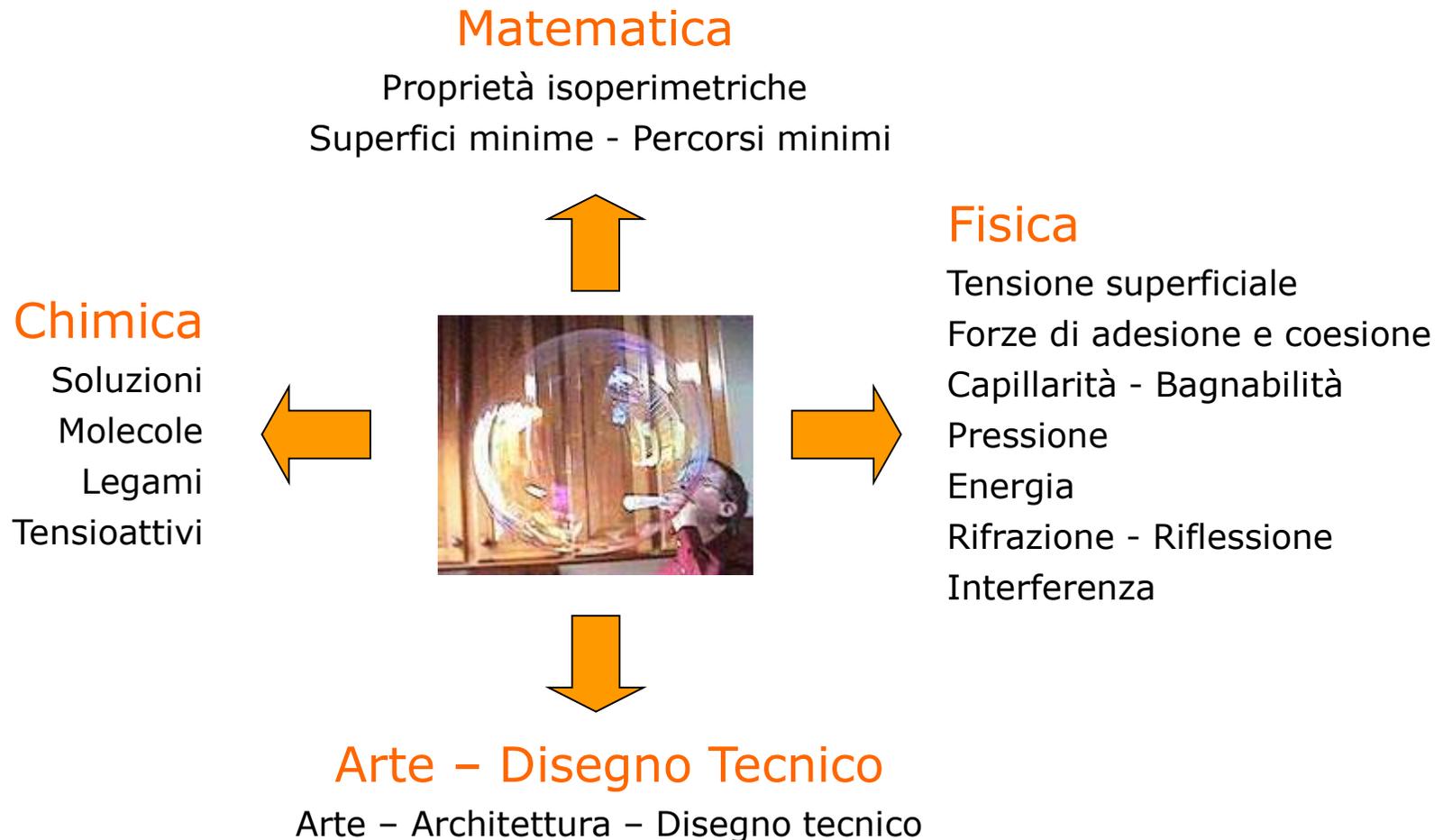
Nel **1873** **Antoine Ferdinand Plateau** elaborò la teoria delle superfici minime, cioè quelle superfici che mantengono intatta una proprietà riducendo al massimo la superficie. Fu il primo a “giocare” con le lamine di sapone e **il più autorevole delle schiumologi**. Le sue leggi di geometria della schiuma sono tuttora valide. Plateau rimase cieco gran parte della propria vita perché durante certe ricerche di ottica, guardò direttamente il Sole. Continuò comunque a studiare la schiuma e le lamine di sapone con l'aiuto di colleghi e amici. Derivò un insieme di leggi che descrivono le schiume attraverso esperienze e osservazione.



Nel **1884** il matematico **Hermann Schwarz** dimostrò la proprietà isoperimetrica della sfera scoperta da Archimede. A differenza di Plateau, che era uno sperimentatore, Schwarz dimostrò matematicamente i suoi risultati.

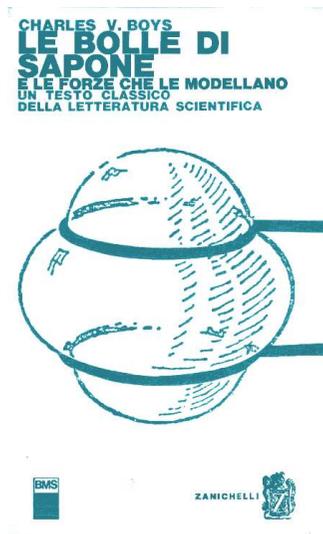
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Collegamenti interdisciplinari



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

La **teoria delle bolle**, fondata alla fine dell'Ottocento da un curioso scienziato inglese, **Charles V. Boys**, che la espose in tre lezioni davanti a un pubblico di giovani ascoltatori alla London Institution nel 1889.



Il suo *Le bolle di sapone e le forze che le modellano* (Zanichelli, 1963), libro curioso e avvincente, ricco di illustrazioni esplicative, spiega una strana fisica.



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

L'ago galleggiante

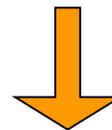
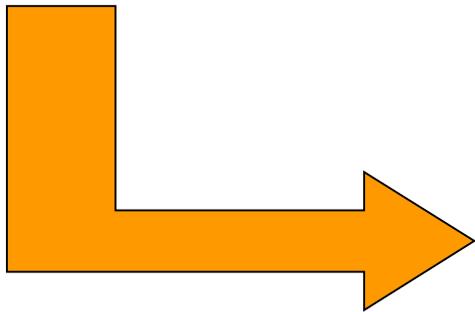
Appoggiate con cura un ago sulla superficie dell'acqua, se l'acqua non riuscirà a bagnarlo completamente, vedrete che essa lo sosterrà senza lasciarlo affondare.



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Alcuni animali riescono a camminare sull'acqua.

Osserviamoli
da vicino



Non galleggiano
Si appoggiano sull'acqua

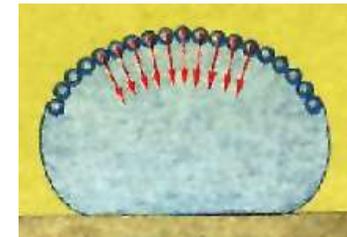
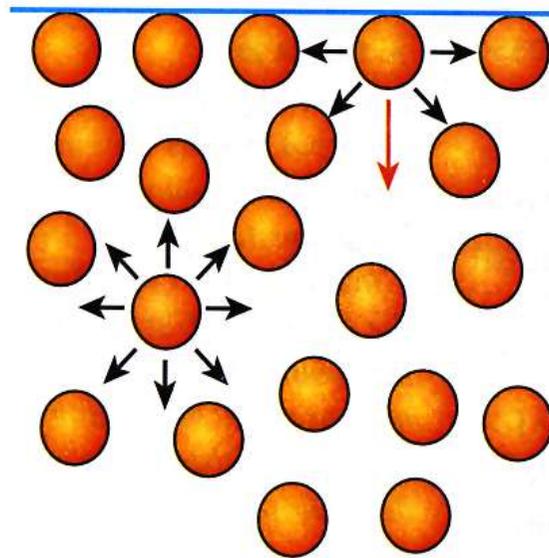
Bolle di sapone e altri problemi di minimo

La tensione superficiale

I fenomeni precedenti sono spiegati dalla **forze di coesione** che agiscono fra molecole dell'acqua.

Come mostra l'immagine, queste forze non hanno effetto sulle molecole che si trovano all'interno del liquido: esse infatti sono circondate da altre molecole quindi sono tirate in tutte le direzioni con forze di uguale intensità.

Le molecole che si trovano sulla superficie, invece, sono attratte solo verso il basso. Si forma allora una "**pellicola elastica**" che riesce a sorreggere corpi leggeri. La **forza** che crea tale pellicola prende il nome di **tensione superficiale**



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Hai mai provato a fare una bolla solo con l'acqua?

Probabilmente non sarai riuscito!!! In realtà quando fai scorrere l'acqua con un po' di pressione dal rubinetto nel lavandino ti sarà capitato di osservare la formazione di piccole bolle che scoppiano subito.

Senza sapone:

1. Le bolle sono più piccole
2. Durano molto meno



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Acqua, sapone e borotalco



Materiale:

Bacinella – detersivo per piatti – borotalco.



Procedimento:

- Versare della polvere di borotalco in una bacinella d'acqua.
- Versare poi qualche goccia di sapone nella bacinella

Osservazioni: Dopo aver messo un po' di borotalco sulla superficie dell'acqua lo si osserva galleggiare. Aggiungendo poi una goccia di sapone sulla superficie dell'acqua si potrà osservare che il borotalco comincia ad affondare e, dopo qualche minuto è completamente scomparso dalla superficie dell'acqua

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Cos'è il sapone?

Il sapone dal punto di vista chimico è un **SALE** ottenuto dalla reazione (detta di *saponificazione*) tra un grasso (per esempio **olio vegetale**) e una base (per esempio **l'idrossido di sodio**).

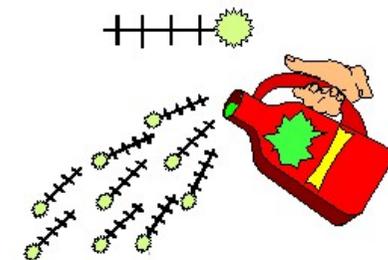
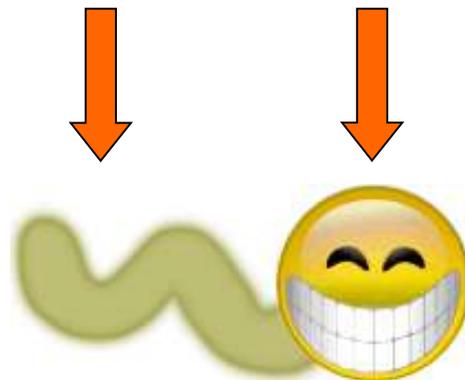
Le molecole di sapone hanno:

un estremo **non solubile** che può legarsi coi grassi ("catturandoli") detto

CODA IDROFOBA

un estremo **solubile** che si lega facilmente all'acqua (ecco perché il sapone si scioglie in acqua) detto

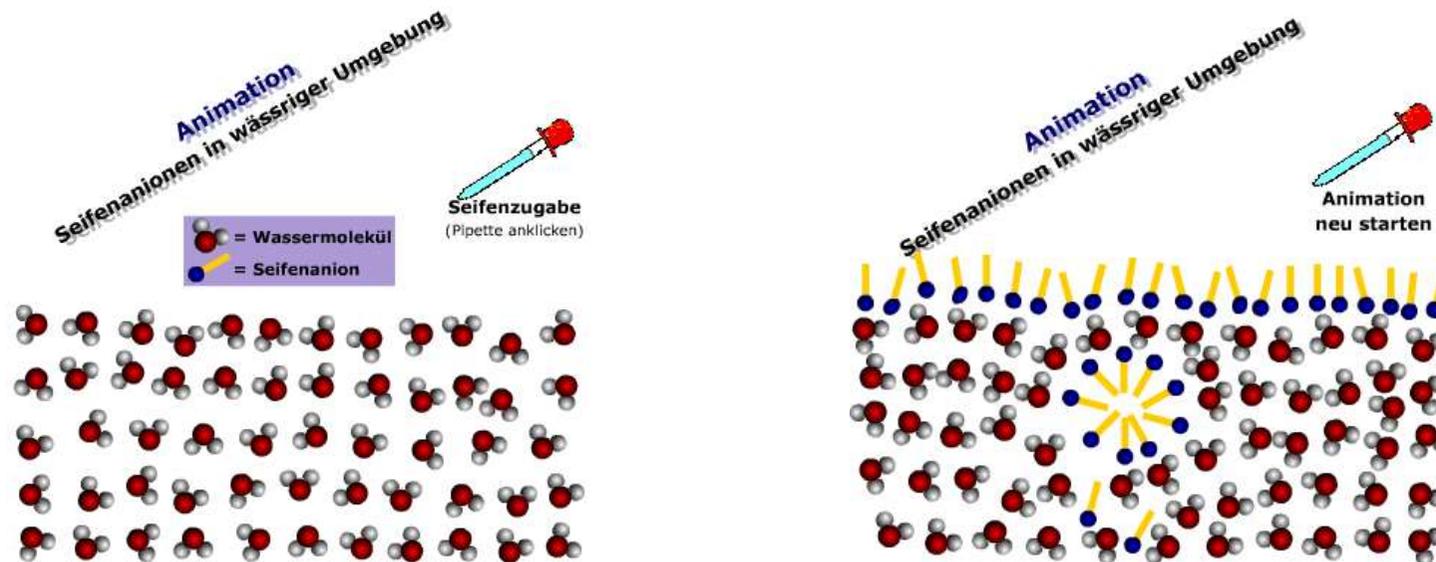
TESTA IDROFILO



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Tensioattivi

Osserviamo come si dispongono le molecole di sapone sulla superficie dell'acqua



Le molecole di sapone spingono le loro **code idrofobe** fuori dall'acqua (perché a loro non piace stare nell'acqua). Mentre le **teste idrofile** rimangono nell'acqua e separano le molecole d'acqua le une dalle altre. Questo fa **diminuire la tensione superficiale** perché la distanza fra le molecole d'acqua aumenta.

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

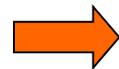
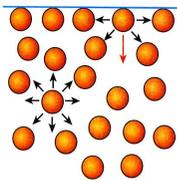
Tensioattivi

I saponi appartengono ad una classe di composti chiamati tensioattivi (agenti attivi in superficie), composti capaci di diminuire la tensione superficiale dell'acqua.

Osservazione: la scoperta che il sapone abbassa la tensione superficiale dell'acqua potrebbe far pensare che sia meglio usare solo l'acqua per fare le bolle! E' infatti un misconcetto che l'acqua non abbia abbastanza tensione superficiale per formare le bolle.

E' proprio il contrario!!!!

La tensione superficiale è quella forza che permette alla superficie delle bolle di formarsi.



Essa però è troppo "forte", e le bolle scoppiano subito.

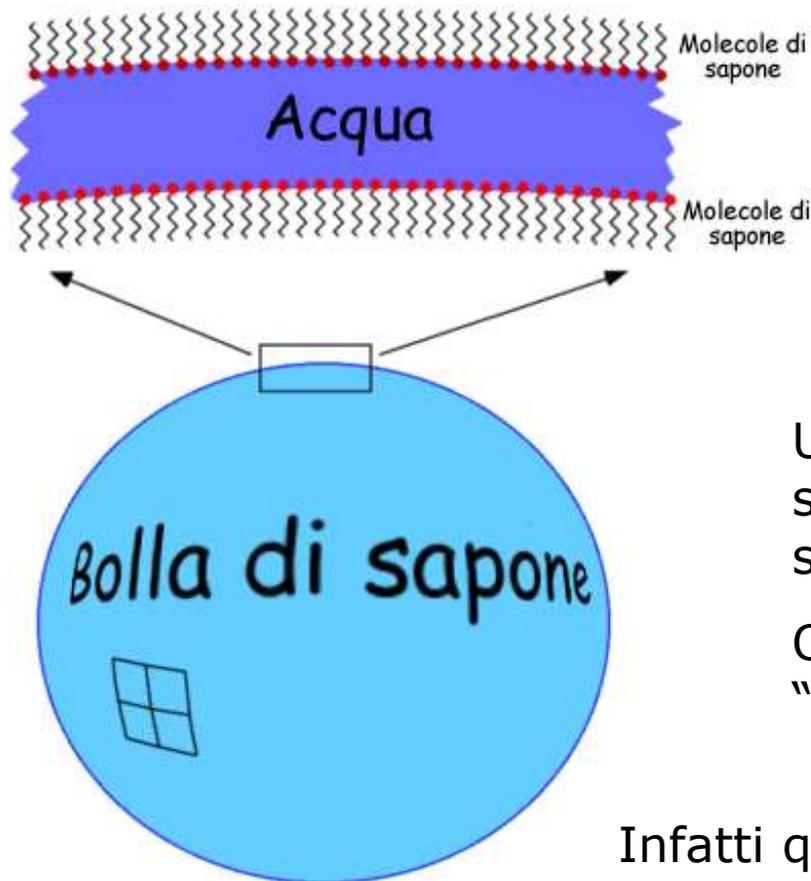


Con il sapone invece la tensione superficiale diminuisce e le bolle hanno maggior durata



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Bolle di sapone



Senza sapone:

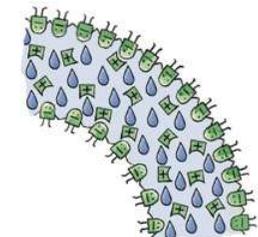
1. Le bolle sono più piccole
2. Durano molto meno

Perché?

Una bolla di sapone è costituita da una sottile pellicola d'acqua racchiusa tra due strati di molecole di sapone.

Questi due strati formano una specie di **"coperta"** che rende stabile la bolla.

Infatti questa "coperta", da una parte, **diminuisce la tensione superficiale**, dall'altra evita **l'evaporazione**.



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Bolle da record



Nel 1999 a Londra 23.680 persone si misero contemporaneamente a far bolle di sapone per un minuto prima dell'inizio di una **partita di calcio**. Questo perché l'inno di una delle due squadre recitava: "Faccio sempre le bolle di sapone ..."



La bolla più lunga:

Alan McKay. La bolla più grande è quella realizzata nel 1996 in Nuova Zelanda: era lunga 32 metri!



Nel 1997 il Canadese Fan Yang creò un **muro di bolle** lungo 47,7m e alto 4 m che copriva un'area di 376 metri quadrati. Il muro riuscì a resistere 5-10 sec!



Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Architettura e bolle



Stadio Olimpico di Monaco di Baviera



L'architetto tedesco **Otto Frei** fece grande uso delle pellicole saponose per ottenere membrane da utilizzare nella progettazione.



Ponte Salgina-Tobel

I ponti di Robert Maillart

La forma semplice ed essenziale di queste strutture è dovuta a profonda conoscenza delle forme, delle strutture, delle moderne tecniche costruttive e dei materiali

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

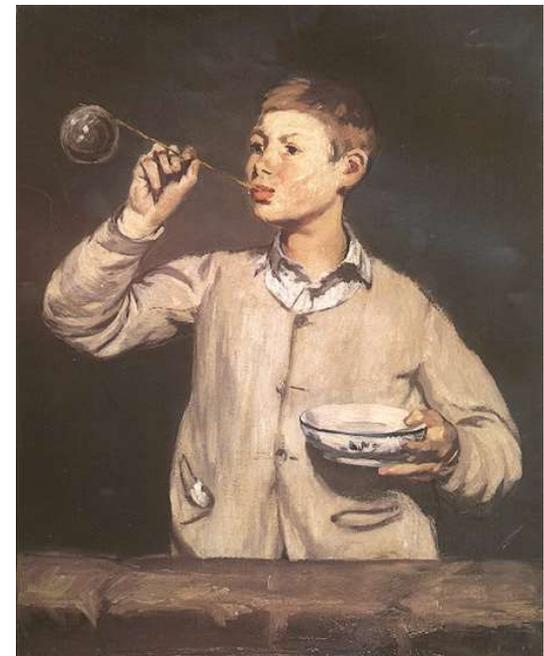
Arte e bolle di sapone



Una delle opere più famose è stata realizzata nella prima parte del Settecento da **Jean Baptiste Siméon Chardin** (1699-1779), in diverse versioni, dal titolo Les bulles de Savon.

Edouard Manet

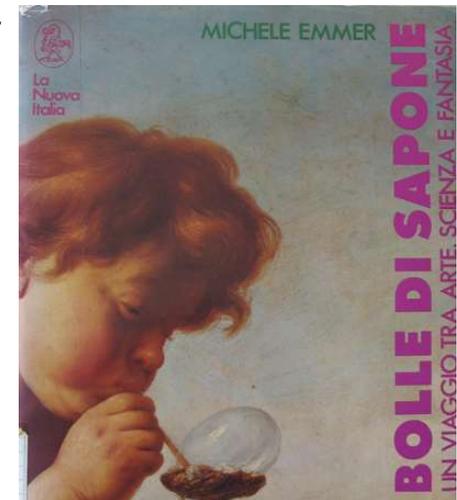
La tela presa in questione si riferisce a un periodo in cui Manet guarda a molti modelli, che ha modo di studiare nelle sale del Louvre. I contemporanei riconobbero in questo dipinto riferimenti a Jean Baptiste Siméon Chardin.



M. Emmer

**Bolle di sapone,
un viaggio tra
arte, scienza e
fantasia**

La Nuova Italia



Bolle di sapone e altri problemi di minimo



"Ora che siamo giunti alla fine, vorrei sapere se dopo aver ascoltato queste lezioni sono spariti in voi l'ammirazione e lo stupore che tutti proviamo giocando con le bolle di sapone, o se, al contrario, sono aumentati proprio perché ne sapete di più.

Spero che vorrete tutti convenire che i principi da cui dipendono fenomeni così comuni e quotidiani come le gocce e le bolle, principi che hanno occupato l'attenzione dei più grandi scienziati dai tempi di Newton ad oggi, non sono così banali da non meritare l'attenzione di persone come noi."

Charles Vernon Boys

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

Bolle di sapone e altri problemi di minimo

Bibliografia

1. *R. Courant, H Robbins* – **Che cos'è la matematica** – Giulio Einaudi editore
2. *E. Castelnuovo* – **Pentole, ombre, formiche: in viaggio con la matematica** – La Nuova Italia
3. *Fulvia Innocenti* – **Fantastiche bolle di sapone** – Editoriale Scienza
4. *Charles V. Boys* – **Le bolle di sapone e le forze che le modellano** – Zanichelli
5. *M. Emmer* – **Bolle di sapone, un viaggio tra arte, scienza e fantasia** – La Nuova Italia
6. *Sidney Perkowitz* – **La teoria del cappuccino** – Garzanti editore
7. Schede e appunti gentilmente concessi dal **Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia Leonardo da Vinci** - Milano.

Sitografia

1. Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia Leonardo da Vinci - Milano
<http://www.museoscienza.org>
2. Museo della scienza, arte e percezione di San Francisco
<http://www.exploratorium.edu/ronh/bubbles/bubbles.html>