

Ferrara

tra Matematica e Storia

Storie di numeri e forme
nell'arte della città

Fare matematica attraverso la storia della città



- Esplorare il territorio attraverso la conoscenza della sua storia è di certo un'avventura didattica multiforme e stimolante, nella nostra affascinante Ferrara
- La città – e non solo – può essere un luogo ricco di spunti di lavoro per intrecciare i saperi e rendere possibili approcci sempre diversi e originali, con indagini sull'evoluzione culturale, demografica, urbanistica, artistica... che coinvolgono la matematica.

Fare storia della matematica esplorando la città



- La matematica svelata nella storia della città permette di scoprire anche la storia della disciplina stessa...
- Si può cogliere infatti, nelle varie epoche, l'evoluzione di un concetto, della sua rappresentazione, delle applicazioni e degli approcci diversi che nel tempo si sono realizzati

Fare storia della città attraverso la matematica



- La visuale può essere anche «capovolta»: forme, numeri, proporzioni possono diventare per gli studenti degli strumenti di lettura di un'epoca, di una forma di pensiero, di una concezione della società
- Osservare, misurare, confrontare, costruire, girando per la città per scoprire dettagli di storia, altrimenti non colti nelle pratiche didattiche, per motivazioni diverse...

Alcuni spunti per la didattica

- Il nostro lavoro vuole solo fornire **qualche traccia** per esplorare la città con un «occhio matematico», per ragionare con gli studenti, a partire dall'osservazione di forme, dalla verifica di rapporti numerici, dalla costruzione di luoghi...
- Le proposte sono in parte estratte da varie attività sviluppate nel corso degli anni con classi di primo e secondo biennio delle scuole secondarie di II grado

Matematica nella Ferrara del Medioevo



- In classi del I anno di liceo, insieme all'insegnante di Storia e Geografia, siamo partiti dalla lettura della mappa della città, per scoprire la sua storia
- Il centro medievale fa emergere evidenze «matematiche» degli equilibri socio- politici dell'epoca, a partire dal significato simbolico di numeri e forme che indicano la centralità del poter temporale e la forte connotazione religiosa di certe «scelte architettoniche»
- Ricorrono diverse rappresentazioni riferibili al numero 5 e al numero 10, numero dei lati di pentagono e decagono regolari e quindi alla sezione aurea...

I.

Il Duomo, Pitagora e... GEOGebra



ARCHIVIO PROVINCIA DI FERRARA

La «cattedrale pitagorica» di Carlo Tubi

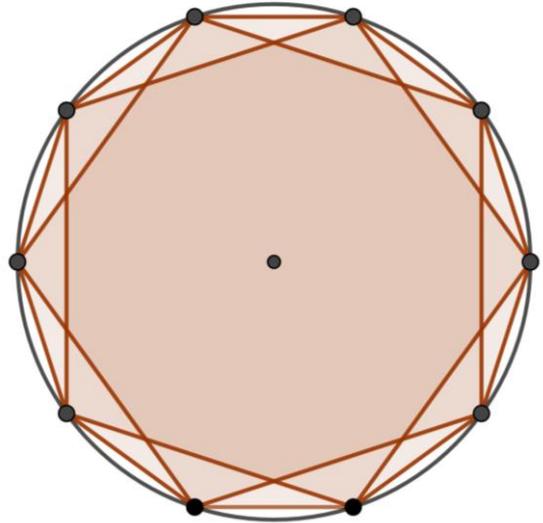
- Tra le fonti a cui abbiamo attinto per quanto riguarda la matematica nella Cattedrale ci è parso, in particolare, molto stimolante e originale l'approccio del testo dell'ingegnere ferrarese Carlo Tubi, «La Cattedrale Pitagorica»
- Il saggio, utilizzando fonti ottocentesche e anche precedenti, presenta un'analisi dettagliata delle diverse relazioni tra elementi architettonici e concetti matematici e fornisce interpretazioni relative al significato mistico di simboli, rapporti e proporzioni presenti nelle scelte progettuali degli architetti medievali

La Cattedrale: le origini

- Le fonti più accreditate affermano che la Cattedrale fu iniziata nel 1130 in un'area appositamente bonificata e prosciugata e che fu consacrata nel 1135. La sua costruzione, di probabile attribuzione allo scultore e architetto Nicholas, pare sia durata più di un secolo.
- ***Perchè costruire una cattedrale?*** Per sancire l'autonomia della città da Ravenna e la riconciliazione con Roma dopo un periodo confuso, a seguito dei conflitti tra Papato e Impero.
- Siamo in pieno Medioevo e nel progetto attribuito a Nicholas emergono riferimenti ad un contesto culturale ispirato alla dottrina platonica e ai Pitagorici.

La Cattedrale: le origini

- Nicholaus utilizza proporzioni tra le parti e il tutto, che riproducono in scala leggi con cui si riteneva che Dio avesse dato forma all'Universo...
- ... le leggi armoniche che Pitagora e la sua scuola avevano formulato fin dal VI secolo a. C. , come riporta Platone nel *Timeo*; in particolare i rapporti e le proporzioni erano basati sulla scomposizione del cerchio in 10 parti uguali.



Pitagora e il principio di armonia

- A Pitagora viene attribuito il **principio di armonia**, la ricerca dell'unitarietà nella descrizione dell'Universo
- Partendo dalla musica, si determinano i rapporti tra le lunghezze delle corde e le caratteristiche dei suoni, individuando i **tre intervalli armonici fondamentali**. Essi sono esprimibili come rapporti dei numeri **1,2,3,4** e da essi derivano tutti gli altri; questi numeri interpretano tutte le qualità dello spazio (punto, linea, superficie piana, volume di un solido)
- Il principio di armonia si estende ai modelli geometrici dei quattro elementi che costituiscono la materia, al modello del cosmo, alla morfologia degli esseri viventi...

Questo principio di armonia

è basato sul numero d'oro, ovvero sul rapporto aureo

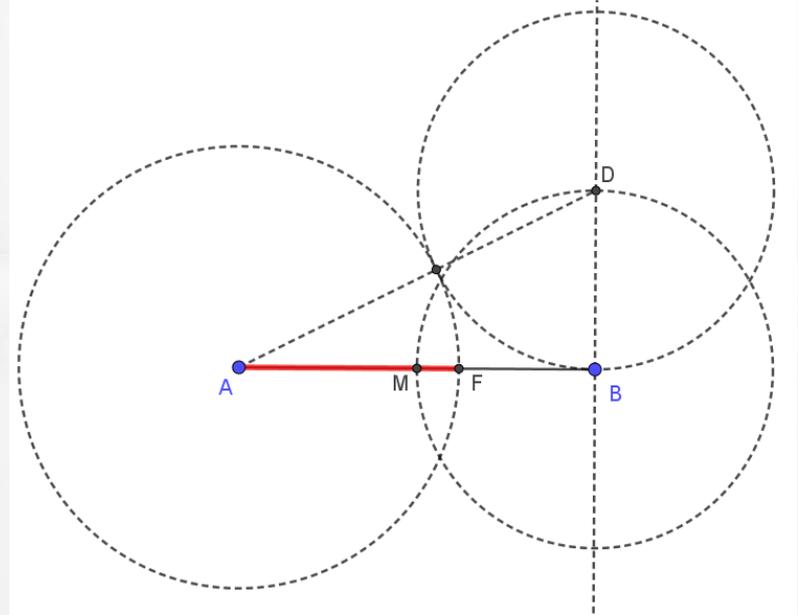
Sezione aurea e numero d'oro



- Nel Medioevo vi è una riscoperta della cultura ellenistica; in particolare la lettura del Timeo di Platone, che riprende elementi della scuola Pitagorica, porta il pensiero medievale alla convinzione che il numero, la proporzione e l'ordine hanno il valore di principi universali, etici ed estetici.
- Il criterio progettuale utilizzato per il Duomo è strettamente correlato con il simbolismo cosmologico proprio dell'edificio sacro cristiano.
- La Decade, il numero 10, viene ritenuto sacro dai Pitagorici ($1+2+3+4=10$, *tetractys*), è l'equivalente del "tutto", è il simbolo dell'Universo

Sezione aurea e numero d'oro

- La sezione aurea è alla base della costruzione del pentagono regolare, del decagono regolare, del pentagono stellato e del decagono stellato
- Costruiamo allora in classe la sezione aurea con GeoGebra:



$$\overline{AB} : \overline{AF} = \overline{AF} : \overline{FB}$$

Le proporzioni del Duomo

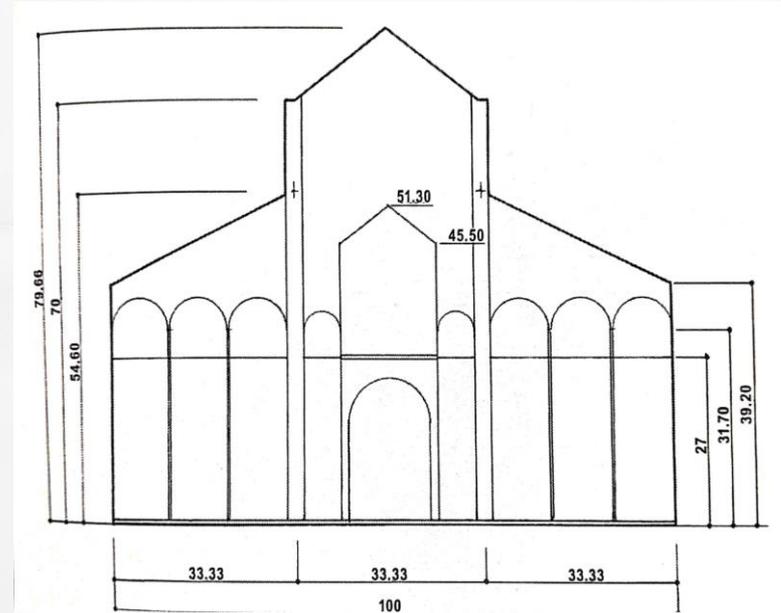
Per rispettare il principio di armonia, il progetto della Cattedrale utilizza, oltre al rapporto aureo, i rapporti della scala pitagorica modificata nel I secolo a.C.:

1	8:9	4:5	3:4	2:3	3:5	8:15	1:2
DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO

Questi rapporti sono stati analizzati dal Tubi basandosi sui disegni dell'Aleotti, che riproducono il progetto originale.

Le proporzioni del Duomo

- Il rapporto tra altezza e larghezza della facciata è 4:5
- Il rapporto tra le dimensioni dei vani d'ingresso delle porte laterali è 1:2
- Il rapporto tra la larghezza degli stipiti e la larghezza dell'architrave è 1:2
- All'interno, il rapporto tra la quota del soffitto e l'ampiezza della campata è il numero aureo
- La parete interna è scomposta, in altezza, secondo i rapporti 1:2, 2:3, 3:4
- E vi sono anche rapporti composti....(es. 1,618+ 4:3)



L'unità di misura: il piede ferrarese

- Le lunghezze sono misurate in piedi ferraresi
- Il **piede ferrarese** (0,403854 m) venne usato nel circondario di Ferrara fino al 1877, quando venne adottato in tutto il Regno d'Italia il sistema metrico decimale
- Nel cortile del Castello Estense è possibile vedere una lapide, nella quale sono riportate le misure adottate dai mercanti per i loro scambi, tra le quali anche il piede



Dalla circonferenza, alla croce... al quadrato



La simbologia del cerchio e del quadrato risale a tempi antichissimi; secondo il saggio del Tubi, che si rifà a Vitruvio e ad altri:

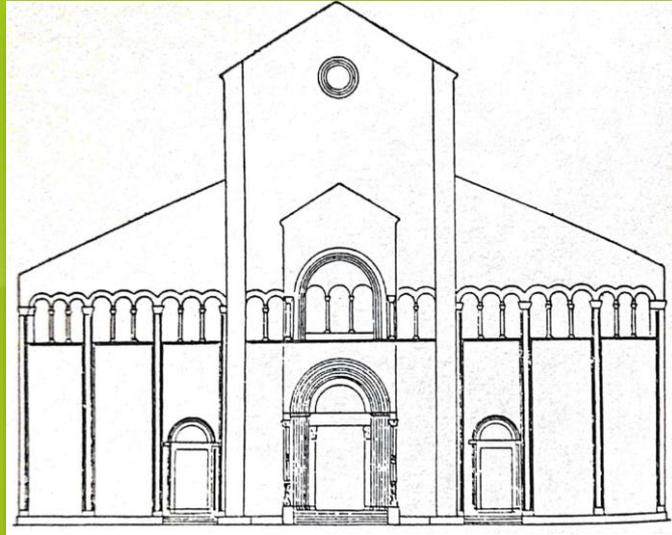
- Il **cerchio** rappresenta l'universo, la sede della divinità, la volta sotto la quale si trova l'uomo.
- Per l'uomo la Terra appare immobile, rigidamente ancorata a un **sistema cruciforme di assi fissi**: Nord-Sud, la stella polare, l'asse attorno a cui sembra ruotare il cielo e Est-Ovest, la nascita e il tramonto del sole.
- La **quaternalità dei punti cardinali** si ritrova nel numero delle stagioni, nelle regioni della terra allora conosciute, negli elementi costitutivi della materia. Il **numero quattro** viene associato alla terra, e la figura che meglio rappresenta il quattro è **il quadrato**.

Circonferenza, croce e quadrato: valore simbolico

- Nel Cristianesimo il cerchio rappresenta il Divino, la croce rappresenta l'Uomo, il quadrato la Terra, sintetizzati dalla figura di Cristo e della sua doppia natura.
- Nel **simbolismo architettonico** l'edificio sacro, basato sul cerchio, deve rivolgersi anche alla Terra (ad es. parte inferiore del portale, quadrata)

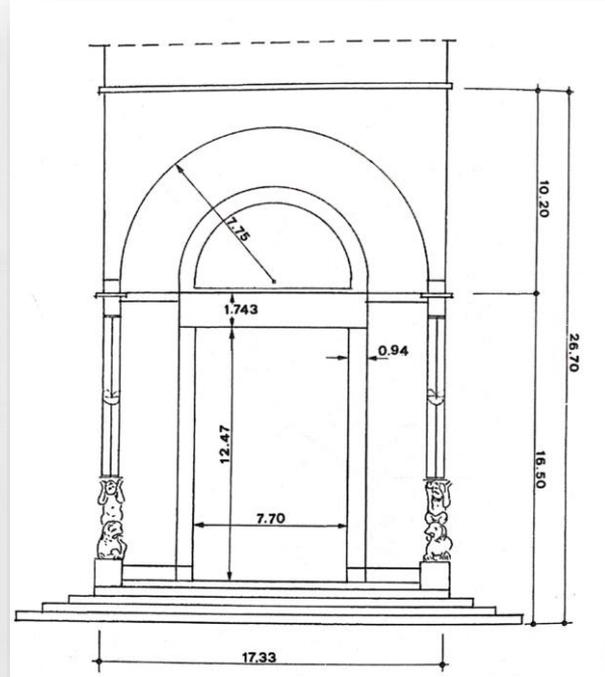


La facciata romanica del Duomo



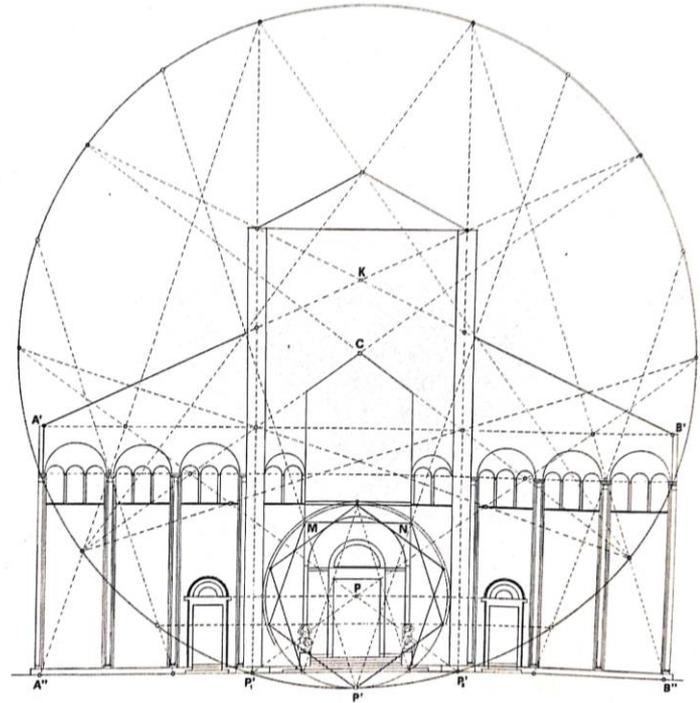
Portale e pentagoni: ancora il rapporto aureo!

- Il doppio protiro viene progettato su uno “schema geometrico proporzionale” basato sul decagono, ma in realtà la costruzione parte dalla larghezza del protiro come lato di un pentagono inscritto in una circonferenza.
- La base del protiro è il lato di un secondo pentagono, simmetrico del primo rispetto al centro della circonferenza.



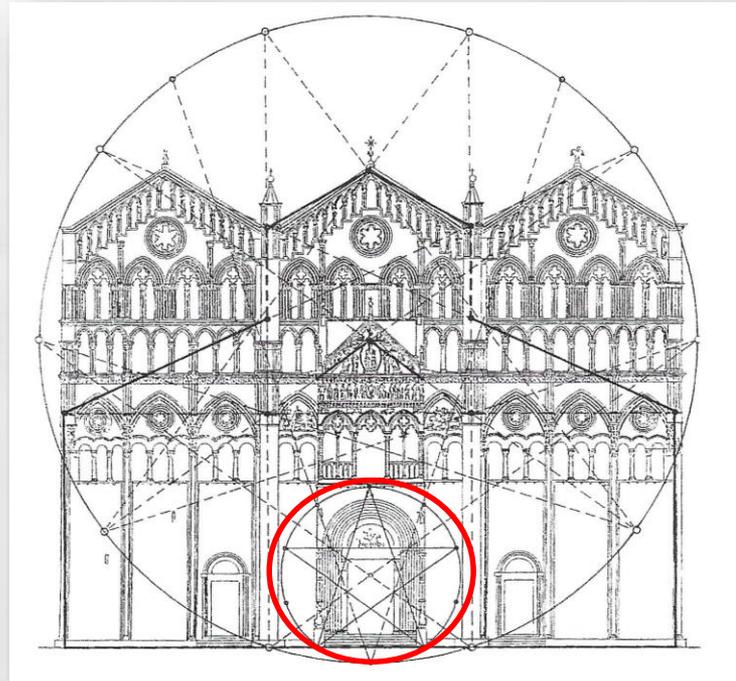
Portale e pentagoni regolari

- Il portale, nella parte inferiore del doppio protiro, vede la presenza di due pentagoni, l'uno capovolto rispetto all'altro, inscritti nella stessa circonferenza.
- I vertici dei pentagoni permettono di visualizzare ancora la scomposizione del cerchio in dieci parti.



Il disegno di G.B. Aleotti (Argenta, 1546 - Ferrara, 12 dicembre 1636)

La facciata è stata successivamente modificata, mantenendo lo stesso schema geometrico- proporzionale e anche nel disegno fatto dall'Aleotti della facciata gotica si può individuare un poligono stellato inscritto nella circonferenza





II.

Geometrie del Rinascimento
nel Palazzo dei Diamanti

Il palazzo dei Diamanti

Progettato da Biagio Rossetti per il duca Sigismondo d'Este nel 1492, è noto principalmente per il bugnato esterno a forma di “punte di diamante”.

Durante i restauri eseguiti attorno al 1990, sono stati rilevati interessanti aspetti matematici riguardanti la facciata est. Agli studenti, assieme all'insegnante di Disegno e storia dell'Arte, è stato proposto di individuarli su varie riproduzioni in scala

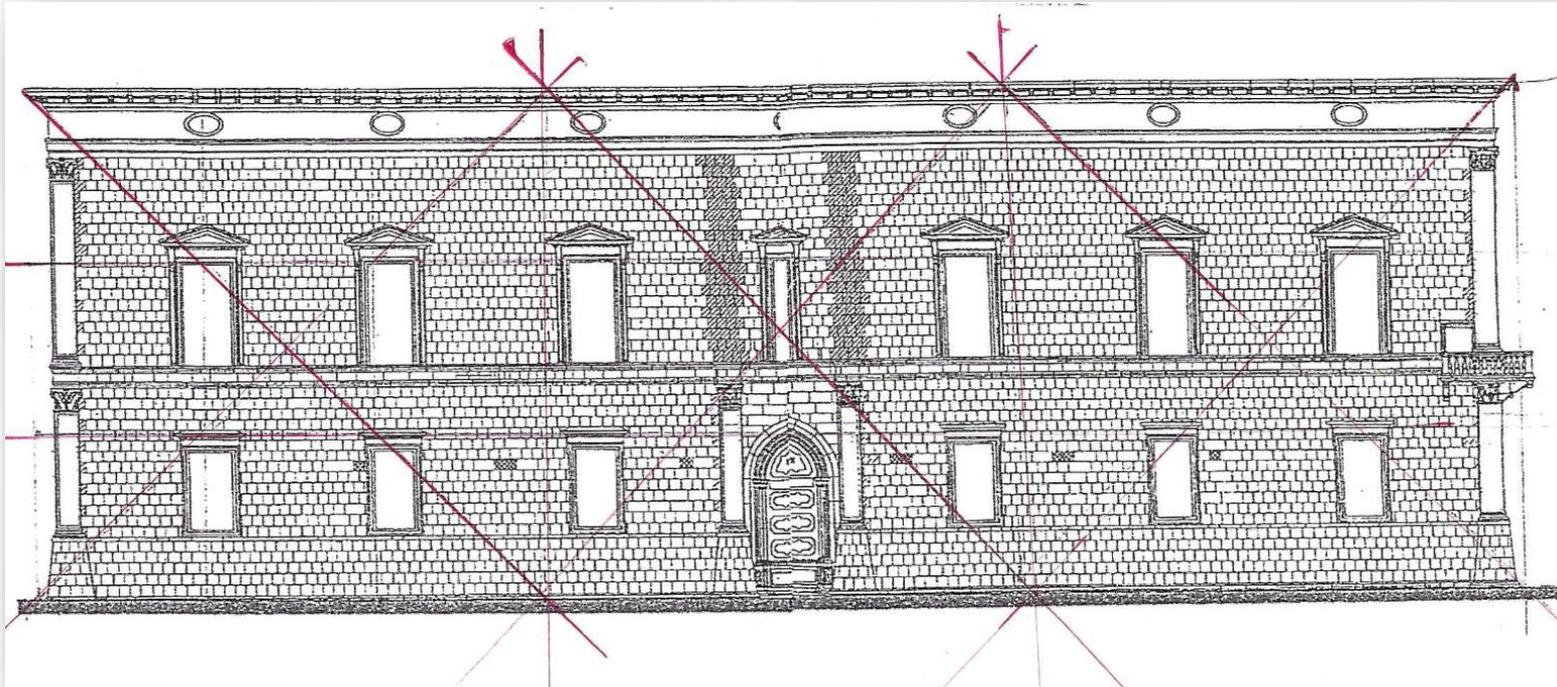


Il modulo quadrato della facciata est: successioni...

Alcuni risultati delle osservazioni e delle misure in scala:

- ★ *Il sistema metrico adottato è il piede ferrarese (40.4 cm), per base del bugnato e modulo della facciata*
- ★ *La larghezza della facciata è 138 piedi, ed è divisa in 3 moduli quadrati di 46 piedi ferraresi.*
- ★ *Dividendo ognuno dei moduli quadrati in tre parti, si può notare che le finestre dei piani nobile e terra sono inserite con le aperture nette dei $\frac{2}{3}$ inferiori della facciata*
- ★ *Il portale, insieme alle paraste, è compreso nella verticale in $\frac{1}{3}$ del quadrato centrale*
- ★ *Si può continuare nella suddivisione del modulo quadrato e si trova che il basamento è $\frac{1}{9}$ dell'altezza, i pilastri del portale $\frac{2}{9}$, etc...*

La facciata est



Il bugnato della facciata: diamanti e ottaedri

- Il bugnato è una lavorazione muraria utilizzata sin dall'antichità e ripresa, con modalità e forme diverse, in varie epoche. È costituito da blocchi di pietra, detti "bugne", sovrapposti a file sfalsate.
- Nel bugnato a punta di diamante le bugne sono costituite approssimativamente dalla metà di un ottaedro regolare, ossia da piramidi a base quadrata. Il lato del quadrato di base misura circa 1 piede ferrarese.



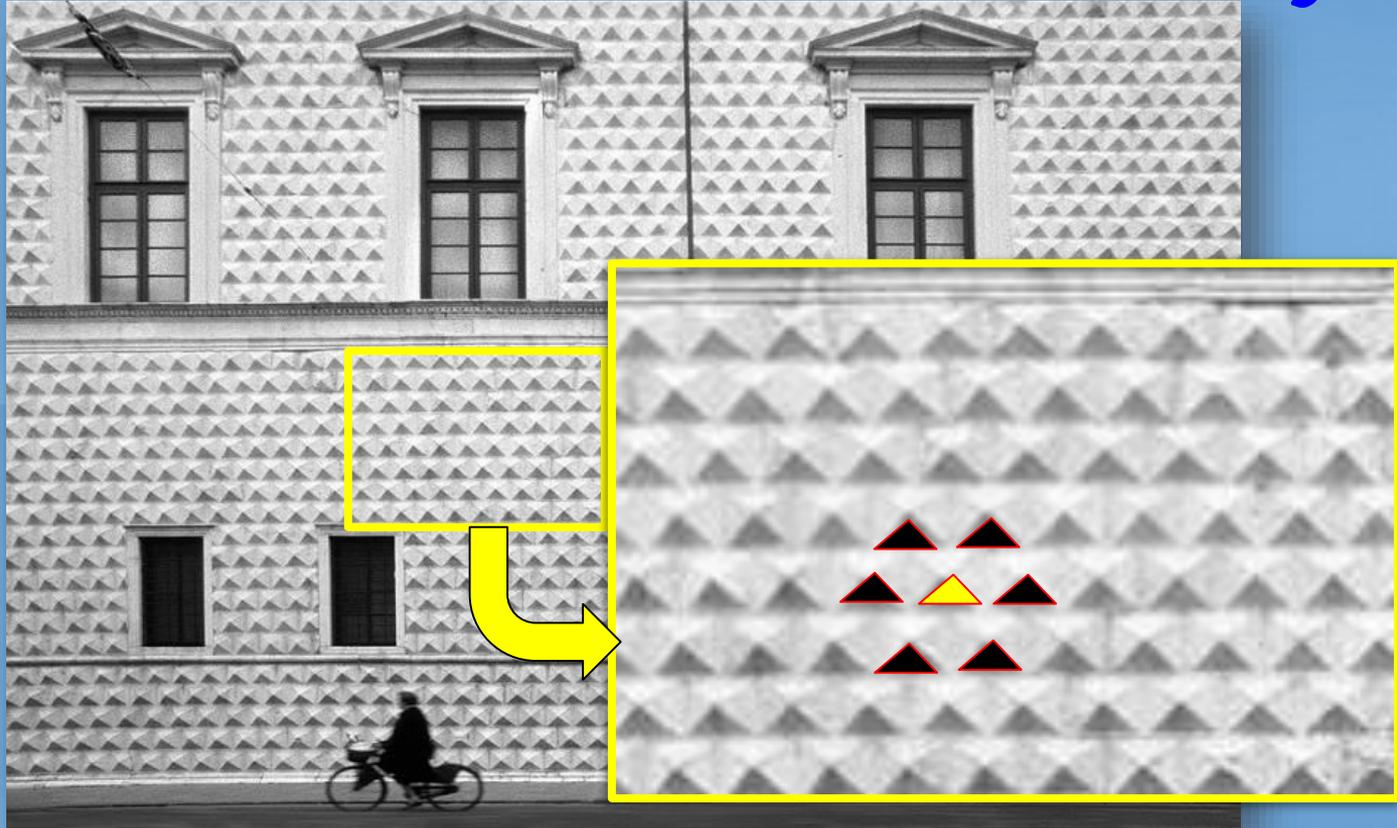
Il bugnato della facciata: diamanti e ottaedri

- La facciata è suddivisa in tre livelli, dal basso verso l'alto: i diamanti ad ogni livello hanno le punte rivolte in tre direzioni diverse.
- Al piano terra sono rivolte verso il basso, al piano intermedio in avanti, perfettamente centrate rispetto al quadrato di base, al secondo piano infine sono rivolte verso l'alto.
- Le facce delle bugne, essendo diversamente inclinate, riflettono la luce creando effetti cromatici particolari.

Così parlò Zevi...

*“ Un’analisi del bugnato, condotta in occasione dei nuovi rilievi eseguiti, ha messo in risalto alcune peculiarità inedite. Si è riscontrato un graduale spostamento dell’asse delle piramidi: nella striscia di bugne del basamento, i vertici delle piramidi sono sensibilmente rivolti verso il basso; nella zona centrale, gli assi sono **rigorosamente normali** ad essa; sopra, s’inclinano di nuovo, ma verso l’alto. Il sospetto che possa trattarsi di un caso fortuito o di un’imperfezione tecnica è dissipato da un’altra osservazione: man mano che ci si appressa alle paraste angolari, **le diagonali congiungenti i vertici delle piramidi seguono un andamento curvilineo regolare, mentre esso si attenua gradualmente nelle zone discoste dallo spigolo.** È mai opinabile che il Rossetti e il Frisoni non ne fossero consapevoli? Queste **impalpabili correzioni ottiche sono essenziali nell’effetto estetico, poiché detraggono ogni meccanicità al muro marmoreo, lo rendono vibrante, lo esaltano: verticalmente, offrendo al riguardante i **triangoli luminosi dei diamanti in alto e in basso**; orizzontalmente, convogliando e intensificando **lo scintillio verso l’angolo**”.***

Regolarità nella disposizione delle bugne...



Credit: Maurizio Tieghi Scatto premiato nell'edizione 2019 del Wiki Loves Monument

Altre «impronte» matematiche in giro per Ferrara ...

Il Castello
Estense

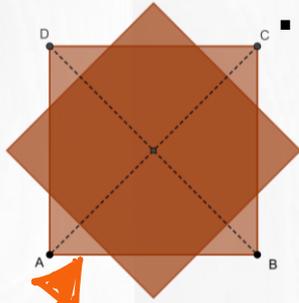
La
Fortezza

Corso
Ercole I
d'Este

La
Rotonda
Foschini



Simmetrie, rotazioni, poligoni stellati...



- *In origine il Castello di Ferrara era costituito da una sola **antica torre di avvistamento** già esistente all'inizio del XIII secolo, inserita lungo la cinta muraria difensiva che allora delimitava la città medievale verso nord, accanto alla Porta dei Leoni. La torre, in mattoni, aveva **pianta quadrata**.*
- *Il 29 di settembre del 1385, giorno di San Michele, quando il marchese Nicolò II diede il via alla costruzione di una potente fortezza, a seguito di una violenta rivolta popolare che avvenne nel maggio e portò alla morte di Tommaso da Tortona, consigliere fiscale del marchese. L'opera fu commissionata a Bartolino da Novara, "ingegnere di corte", il quale progettò il **Castello di San Michele**, a partire da un nucleo difensivo costruito presso la Porta del Leone, probabilmente di sua ideazione.*

Castello Estense – Rivellino Nord

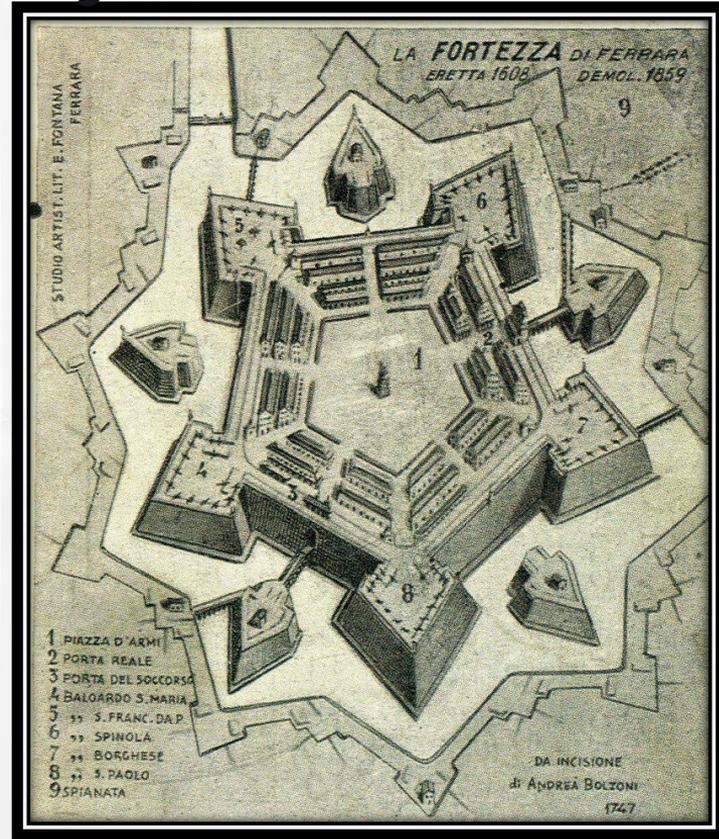
Pentagoni e poligoni stellati ...

La **Fortezza di Ferrara**, detta anche **cittadella di Paolo V**, è stata una struttura difensiva di grandi dimensioni sulla cinta muraria di Ferrara.

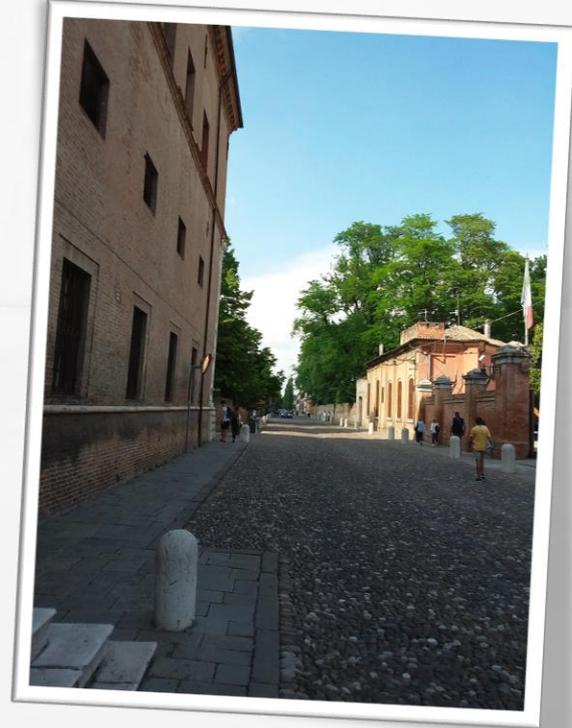
Di struttura di base **pentagonale**, essa fu costruita nel 1608 e demolita definitivamente nelle sue principali strutture a partire dal 1859.

Di essa rimangono solo i Bastioni di Santa Maria e di San Paolo.

Anche la pianta della città, all'epoca, ha forma pentagonale.

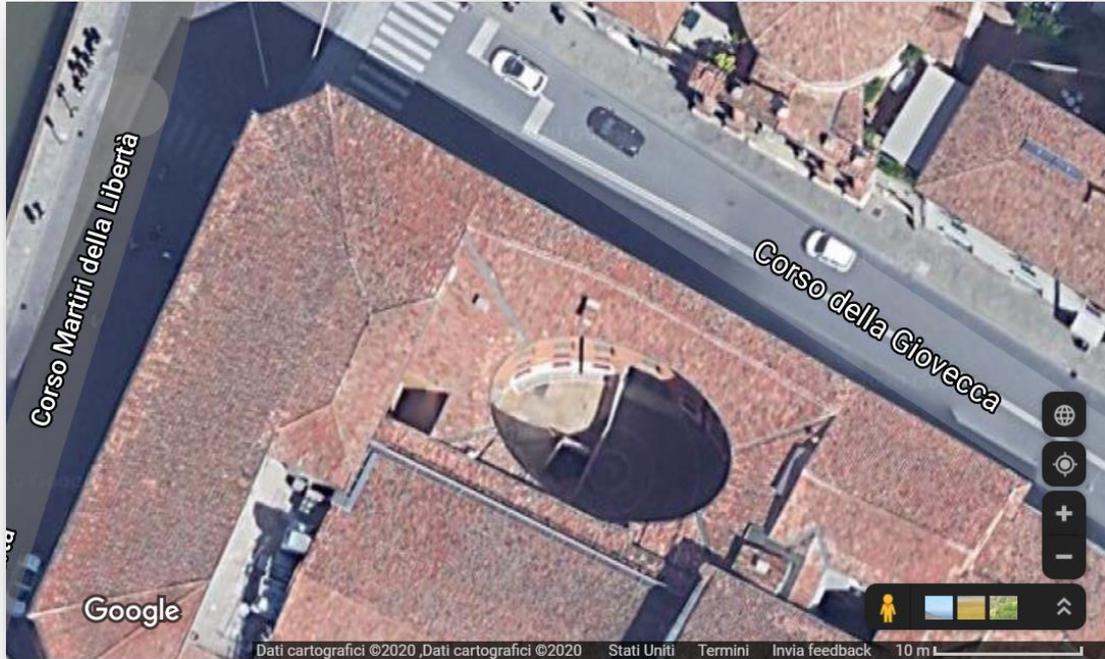


Ferrara: la prima città moderna d'Europa - la prospettiva



← Corso Ercole d'Este

La Rotonda Foschini da satellite...



Ulteriori spunti didattici interdisciplinari a partire da esplorazioni con:

- Google Maps
- app MathCityMap e OpenStreetMap

<https://www.google.com/maps/@44.8376522,11.6203223,55m/data=!3m1!1e3?hl=it-IT>

Principali riferimenti bibliografici e sitografici



- **Bruno Zevi**, *Saper vedere l'urbanistica. Ferrara di Biagio Rossetti, la prima città moderna europea*, Torino Einaudi, 1971
- **C.Tubi**, *La cattedrale Pitagorica. Geometria e simbolismo nel duomo di Ferrara* Ferrara, Corbo Editore, 1989/ Festina Lente Edizioni, 2013
- **C. Bassi**, *Perché Ferrara è bella*, Corbo Editore, 1994



- **G. Papillo**, *Il rilievo architettonico come strumento di lettura critica della facciata est*, in C. Di Francesco (a cura di), Palazzo dei Diamanti – Contributi per il restauro, s.n., Ferrara, 1991.
- **A.Farinelli Toselli – F.Scafuri**, Ferrara, VII-XX secolo, Assessorati Istituzioni Culturali e Beni Monumentali, Comune di Ferrara, 1991-93



- <http://www.medioevo.org/artemedievale/Pages/EmiliaRomagna/CattedralediFerrara.html>
- <https://www.ferraterraeacqua.it/it/ferrara/scopri-il-territorio/arte-e-cultura/chiese-pievi-battisteri/cattedrale>
- <http://www.isco-ferrara.com/wp-content/uploads/2017/05/cattedrale.pdf>



- <http://www.palazzodiamanti.it/>
- <http://www.isco-ferrara.com/wp-content/uploads/2018/01/2-castello.pdf>
- <https://www.castelloestense.it/it/il-castello>
- [Foto Fortezza: di Sconosciuto - Cartolina d'epoca che riproduce un'incisione di Andrea Bolzoni del 1747, Pubblico dominio](#)

Grazie per l'attenzione

Daniela Gambi

Liceo Ariosto

Rossella Mistrone

Liceo Rotti

Ferrara