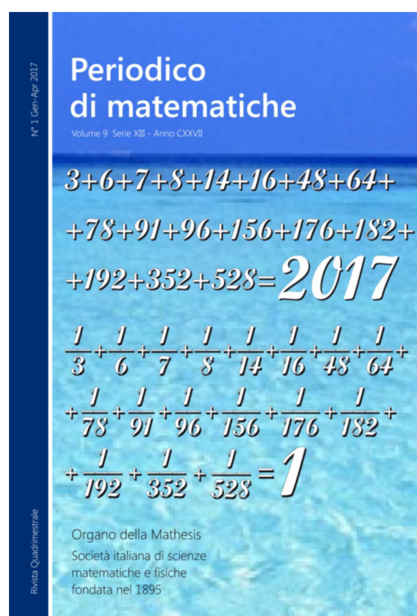
Editoriale

La didattica della matematica oggi: dal discreto al continuo

Abstract

The mathematical didactics has gradually left the reference to global or partial placement of whole chapters or areas of mathematics to be retraced in teaching activities. The current trend consists in a passage from discrete to continuous. Teaching methods and mathematical structure are recreated from the important and meaningful elements to teach and learn.

I fascicoli del Periodico hanno tutti una loro immagine di copertina. Quella attuale ha la particolarità di essere stata scelta dai presidenti delle sezioni Mathesis. L'hanno preferita ad altre proposte che si differenziavano per lo sfondo. Il cielo azzurro e sereno, con nuvole bianche e soffici che lo arricchiscono di forme e colori, è stato preferito allo sfondo di un mare limpido e luccicante (è riprodotto qui a lato).



Lo sfondo del cielo ha prevalso dunque su uno sfondo di mare che pure si accompagna spesso alla trasposizione letteraria dell'attività speculativa sui numeri.

L'una e l'altra immagine di copertina trasmettono armonia e gradevolezza. Nell'una e nell'altra c'è comunque qualcosa che s'impone: un risultato numerico che sorprende per regolarità e semplicità. Diciassette numeri che sommati danno 2017 e gli stessi numeri denominatori di frazioni la cui somma è 1. Come non rimanerne subito soggiogati?

Il fascino dei numeri è dominante! Che 2017 sia ripartibile in una somma di interi positivi i cui reciproci hanno somma 1 può apparire decisamente straordinario, una sua specifica particolarità. In effetti non è così e non è affatto un caso singolare. Al contrario, è una caratteristica di cui godono tutti gli interi più grandi di 77. È questo uno dei risultati più belli della teoria dei numeri e come tale inserito in una lista compilata circa un trentennio fa, nel 1988, dalla nota rivista *The Mathematical Intelligencer*. La lista contiene 24 risultati, ma non ha, ovviamente, pretese di oggettività e per un suo approfondimento si può ricorrere all'Antologia del sito www.matmedia.it. Un'antologia che è una raccolta di tante liste importanti per la matematica, la sua storia la sua comunicazione il suo insegnamento.

I 24 risultati sono riportati alla pagina seguente. Un matematico, leggendoli, è spinto per sua formazione, a spiegarseli e a pensare di spiegarli ad altri illustrandone significati e portata in modo chiaro, eventualmente adottando quello che nell'editoriale scorso abbiamo chiamato il criterio di *Gergonne e Hilbert*: renderlo comprensibile alla prima persona che s'incontra per la strada. Un'operazione importante e anche impegnativa perché comporta qualcosa di nuovo: induce a ri-assemblare diversamente ciò che si sa. Chi studia matematica, infatti, incontra generalmente la maggior parte di quei risultati, ognuno però a tempo debito, posto all'interno di un capitolo o un ragionamento logico, con una sua ben precisa collocazione. Spiegarlo svincolato da ciò che solitamente gli è propedeutico o conseguente comporta dunque certamente uno sforzo, ma apre ad un modo diverso di *fare matematica* e di raccontarla.

Se un gruppo sufficientemente ampio di matematici s'impegnasse in quest'operazione di spiegazione, potrebbe in seguito utilizzarne il risultato per avviare un serio dibattito: confrontarsi sui racconti prodotti, valutarne le scelte in termini di rapidità ed efficacia comunicativa, riflettere sulle vie ed inferenze logiche più produttive, soffermarsi sulle modalità espressive più ricche di decolli semantici. Il dibattito tra l'altro non potrebbe non stimolare ad una generale e collettiva riflessione sulle possibili risposte alla domanda: che cos'è che è bello in matematica? La semplicità e brevità della formulazione simbolica o linguistica? Il legame inaspettato e misterioso com'è, ad esempio, per $e^{i\pi} = -1$ e per $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \ldots = \frac{\pi^2}{6}$? O anche la dimostrazione semplice ed elegante, com'è nel caso della irrazionalità di radice di 2 e dell'infinità dei numeri primi? La conseguenza non potrebbe che essere un affinamento generale della sensibilità e del gusto estetico e un aumento della disponibilità individuale e collettiva nel saper cogliere la bellezza matematica, argomento cui si collega l'articolo di Biagio Scognamiglio presente alle pagine 25-30 di questo Periodico.

L'intera operazione compiuta dall'ipotetico gruppo di matematici arrecherebbe innegabili vantaggi ambientali sia sul piano della crescita intellettuale che della partecipazione collettiva. Risulterebbe in definitiva, un contributo notevole alla matematica e alla sua comunicazione, alla sua letteratura e al suo insegnamento.

A	La formula di Eulero per i poliedri: $V + F = S + 2$	M	Ad ogni party c'è una coppia di persone che ha lo stesso numero di amici presenti.
B	*Ogni matrice quadrata soddisfa la sua equazione caratteristica.*	N	Dato n, il numero di partizioni di n in interi dispari è uguale al numero delle partizioni di n in interi distinti.
C	$\frac{5\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x}$ $= p(4) + p(9)x + p(14)x^2 + \ldots$ dove $p(n)$ è il numero di partizioni di n.	O	Se i punti del piano sono ciascuno colorati di rosso, giallo o blu, allora c'è una coppia di punti dello stesso colore la cui mutua distanza è 1.
D	I numeri primi sono infiniti.	P	Ogni mappa può essere colorata con 4 colori.
E	√2 non è esprimibile come frazione.	Q	Un'applicazione continua del disco unitario chiuso in sé ha un punto fisso.
F	Ogni numero primo della forma $4n+1$ è la somma di due quadrati interi esattamente in un modo.	R	Prima riga: i multipli di √2, solo la parte intera; sotto gli interi naturali che mancano nella prima. 1 2 4 5 7 8 9 11 12 ... 3 6 10 13 17 20 23 27 30 … La differenza è 2n al posto n-esimo.
G	$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$	S	Un icosaedro regolare inscritto in un ottagono regolare divide gli spigoli nel rapporto aureo.
H	$\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{4\times5\times6}+\frac{1}{6\times7\times8}-\cdots=\frac{\pi-3}{4}$	T	Il numero di rappresentazioni di un intero dispari come somma di 4 quadrati è 8 volte la somma dei suoi divisori; di un intero pari, 24 volte la somma dei suoi divisori dispari.
I	π è trascendente.	U	Il *problema della parola* per i gruppi è irresolubile.
J	Ogni numero più grande di 77 è la somma di interi i cui reciproci hanno somma 1.	V	L'ordine di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo.
K	L'area massima di un quadrilatero di lati a, b, c, d è $\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}^{1/2}$, dove s è il semiperimetro.	W	$e^{i\pi} = -1$
L	Un triangolo equilatero i cui vertici abbiano coordinate intere non esiste.	X	Esistono 5 poliedri regolari.

L'operazione descritta può avere conclusioni ancor più rilevanti e realistiche se invece della lista dei risultati più belli l'oggetto della spiegazione e della comprensione è la lista dei risultati di apprendimento attesi a conclusione di un determinato percorso di studi. In questo caso infatti l'ipotetico gruppo di lavoro s'identifica con la più ampia comunità dei docenti che vi insegna. Data la lista, il compito risulta chiaro per tutti, unificante per l'intera comunità. La lista a fianco, ben nota ai lettori del Periodico e ai docenti italiani, è il prodotto di un progetto di lettura e di interpretazione delle Indicazioni Nazionali e Linee Guida voluto dal MIUR.

GALLERIA MATEMATICA

I risultati di apprendimento a conclusione del primo biennio dei nuovi Licei, Istituti Tecnici e Professionali

I risultati di apprendimento comuni alle Indicazioni Nazionali per i Licei e alle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali sono stati selezionati nell'ambito di un progetto nazionale promosso dalla Direzione Generale per gli Ordinamenti Scolastici e per l'Autonomia Scolastica del MIUR che ha coinvolto numerosi docenti.

Un quadro che riporta la selezione dei risultati di apprendimento da conseguire a conclusione del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Nella presentazione ufficiale del lavoro si legge: *"Ciascun punto della lista ha la funzione di guidare il docente nella sua progettazione didattica, nella definizione del suo programma d'insegnamento. Il docente [...] sa quale è il traguardo, sa dove gli si chiede di arrivare. Sa che la meta del suo lavoro è l'acquisizione chiara e sicura da parte degli studenti[...]di ciascuno di quei sedici elementi* *della lista. Una meta che può raggiungere come vuole, scegliendo metodi, strumenti, linguaggi, esempi che arricchiscono di significato, applicazioni che contestualizzano, riferimenti storici e, sempre calibrando i tempi, seguendo un itinerario che attraversa i capitoli tradizionali, connettendo variamente teoremi e algoritmi, cogliendone particolari e generalizzazioni in una visione unificatrice. Il docente gioca cioè con il suo sapere matematico, come un giocoliere che manovra e assembla diversamente ciò che sa; non insegna l'Algebra, la Geometria, la Trigonometria nelle loro false sistemazioni, non srotola né ricapitola una matematica già fatta ma rimescola, associa fatti, idee e procedure che ri-organizza in una rete robusta di ragionamenti e non seguendo le esili e canoniche catene deduttive".* In effetti è quello che si desiderava avvenisse e che non è avvenuto, ma che si spera venga ripreso e rafforzato.

Entrambe le liste di cui si è parlato offrono ovviamente il fianco a possibili critiche. La seconda in particolare, proprio per il suo legame all'insegnamento e alla didattica, si presta di più ad essere attaccata. L'accusa più immediata è di fare a pezzi la matematica; di essere il frutto di una propensione al cannibalismo che lacera il tessuto di una disciplina sempre vista dotata di una forte e armonica unità, intimamente connessa in una trama priva di tagli, salti, discontinuità di sorta. E l'accusa non è priva di un fondamento. Anzi è una questione così importante e significativa per la didattica della matematica che si è posta come autentico dilemma: se la connessione e l'integrità del tessuto matematico dovesse continuare a essere un punto di partenza o di arrivo. Va detto subito che la tendenza attuale è la seconda delle due alternative. La didattica della matematica ha abbandonato, e da tempo, ogni riferimento a sistemazioni globali o anche parziali riguardanti interi capitoli o ambiti da srotolare o scodellare nell'insegnamento. D'altronde non si può insegnare tutto. Occorre scegliere. La tendenza pedagogica a livello della scuola primaria e secondaria è di procedere *dal locale al globale* anzi, meglio, *dal discreto al continuo*, qualcosa di analogo alla canonica costruzione dei numeri reali partendo dai naturali: il discorso didattico e la connessione del tessuto matematico sono ricostruiti a partire da ciò che in un determinato momento viene ritenuto importante e significativo da insegnare e apprendere. Qualcosa che sul piano metodologico è in sintonìa con la *didattica laboratoriale*, la *flipped classroom*, il *problem posing* e *solving*, in una parola con il significato di *fare matematica* che è un modo per coltivare l'intelligenza degli studenti.

Emilio Ambrisi