NUOVA CURVA ISOCRONA.

Si veda il Tomo Ottavo dalla Raccolta Ferrarese stampato dal Coleti in Venezia l' anno 1781. Ora si aggiungono alcuni Corollarj.

NUOVA CURVA ISOCRONA.

1. Avvi presso i Meccanici la Curva detta semplicemente *isocrona*, ch' è quella, lungo la quale un corpo cadendo si accosta al centro della Terra egualmente in tempi eguali. Avvi anche l' altra Curva isocrona detta *paracentrica*, lungo la quale un corpo che cada si discosta da un punto dato, o vi si accosta, egualmente in tempi eguali. Ambe codeste Curve furono proposte la prima volta dal Leibnizio. La Curva, che non ha molto mi si presentò alla mente, e ch' io dirò pure *isocrona*, è tale, che un corpo cadendo lungh' essa per un qualunque arco *ADC* (F. 1.) impiega un tempo eguale a quello, che impiegherebbe cadendo lungo la corda corrispondente *AEC*. Sarà questa il soggetto di questi pochi fogli.

2. Si dica $AB = x$, $BC = y$; qualunque $AF = a$ e sia k il tempo della caduta libera per AF, e $Bb = dx$.

3. Sarà $AEC = \sqrt{x^2+y^2}$, $nc = dy$, $Cc = \sqrt{dx^2+dy^2}$, e $\sqrt{AF}$, $\sqrt{AB}$ :: $t.AF$, $t.AB$, cioè $\sqrt{a}$, $\sqrt{x}$ :: k, $t.AB = \frac{k\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$: E differenziando questo tempo si avrà $\frac{k\,dx}{2\sqrt{ax}} = t.Bb$.

4. In oltre AB, $AC :: t.\,AB$, $t.\,AC$, cioè x, $\sqrt{x^2+y^2} :: \frac{k\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, $t.\,AEC = \frac{k\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{ax}}$.

5. E poichè la velocità in B di un corpo caduto per AB è eguale alla velocità in C, sarà Bb, $Cc ::$ $t.\,Bb$, $t.\,Cc$, cioè dx, $\sqrt{dx^2+dy^2} :: \frac{k\,dx}{2\sqrt{ax}}$, $\frac{k\sqrt{dx^2+dy^2}}{2\sqrt{ax}} = t.\,Cc$.

6. Ma dev'essere (1) $t.\,AEC = t.\,ADC$. Dunque $t.\,AEC = \int t.\,Cc$, cioè $\frac{k\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{ax}} = \int \frac{k\sqrt{dx^2+dy^2}}{2\sqrt{ax}}$ (4, 5), oppure $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{2\sqrt{x}}$.

7. Si metta $y = \frac{xz}{a}$. Sarà $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x\sqrt{a^2+z^2}}{a}$, e $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a^2x+xz^2}}{a}$, e differenziando si avrà $\frac{a^2dx+z^2dx+2xz\,dz}{2a(\sqrt{a^2+z^2})\sqrt{x}} = (6)$ $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{2\sqrt{x}}$, onde $\frac{a^2dx+z^2dx+2xz\,dz}{a\sqrt{a^2+z^2}} = \sqrt{dx^2+dy^2}$.

8. Essendo $y = \frac{xz}{a}$ (7) sarà $dy = \frac{x\,dz+z\,dx}{a}$. Quindi sostituendo nell'ultima equazione del n. precedente, quadrando, e riducendo si avrà $\frac{2\,dx}{x} = \frac{a^2dz - 3z^2dz}{z.\,\overline{a^2+z^2}} = \frac{dz}{z} - \frac{4z\,dz}{a^2+z^2}$: ed integrando $2\,l.\,x = l.\,z - 4.\,l.\sqrt{a^2+z^2} + l.\,a^5$, cioè $l.\,x^2 = l.\,z - l.\,\overline{a^2+z^2}^2 + l.\,a^5 = l.\,\frac{a^5z}{\overline{a^2+z^2}^2}$, ed $x^2 = \frac{a^5z}{\overline{a^2+z^2}^2}$, onde $x = \pm\frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$, e sostituendo $\frac{ay}{x} = z$ (7) si avrà $x^2+y^2 = a\sqrt{xy}$ $\boxed{A}$, o sia $x^4+2x^2y^2+y^4-a^2xy = 0$ $\boxed{B}$; equazione della Curva ricercata, dalla quale coi metodi soliti si potranno avere i valori delle y dati per x, ed a, dei quali due possono essere reali, e positivi. Vedi l'Appendice.

9. Per costruire la Curva, si prenda una verticale $AF = a$ (F. 2.), ed all'asse orizzontale FO sia descritta la parabola FM del parametro a, cosicchè presa $FG = z$ sia $GM = \sqrt{az}$. Indi condotte le AG, AM si tirino la FK normale alla AG, e la KI parallela alla GM; e fatta $AB = KI$ si conduca l'orizzontale BC sino all'incontro colla

AG in C. Sarà $AG = \sqrt{a^2+z^2}$, ed $AG, AF :: AF, AK, = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+z^2}}$; ed $AG, GM :: AK, KI$, cioè $\sqrt{a^2+z^2}, \sqrt{az} :: \frac{a^2}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $KI = \frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2} = x$ (8) $= AB$: Come pure sarà $AF, FG :: AB, BC$, cioè $a, z :: x, \frac{xz}{a} = BC = y$ (8). Dunque C è un punto della Curva, la quale così si trova come la $AiCP$. Presa $AR = a$, e descritta la parabola RS dell' asse RT, e del parametro a, con una costruzione eguale alla esposta si troveranno i punti c dell' altra egual Curva AcQ corrispondenti alle ascisse $Ab = x$ negative $= -\frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (8).

10. Si potrebbero trovare facilmente molti punti della Curva per descriverla anche nella seguente maniera. Si metta $x, y :: m, n$, cioè $x = \frac{my}{n}$. Sostituendo nella equazione A al n. 8. si troverà $y = \frac{an\sqrt{mn}}{m^2+n^2}$. Quindi se $m = 10$, ed $n = 1$ sarà $y = \pm\frac{a\sqrt{10}}{101}$, ed $x = 10y$; se $m = 10$, ed $n = 2$, sarà $y = \pm\frac{2a\sqrt{20}}{104}$, ed $x = 5y$; se $m = 10$, ed $n = 3$,

sarà $y = \pm\frac{3a\sqrt{30}}{109}$, ed $x = \frac{10y}{3}$, ec.

11. Quando la $FG = z$ calando diviene $= 0$ la AG coincide colla verticale AF divenendo tangente della Curva in A; e quando $FG = z$ crescendo diviene infinita la AG coincide colla orizzontale AV divenendo tangente pure in A della Curva, come dalla esposta costruzione si può facilmente dedurre; con che si rende manifesto, che la AF è normale al ramo AP in A, e che la AV è normale al ramo AC in A.

12. Intanto rapporto alla Curva $AiCPA$ sarà $x = AB = \frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (8), ed essendo $y = \frac{xz}{a}$ (7) sarà $y = \frac{az\sqrt{az}}{a^2+z^2}$, e $dx, dy :: D.\frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}, D.\frac{az\sqrt{az}}{a^2+z^2} :: a.\overline{a^2-3z^2}, z.\overline{3a^2-z^2}$.

13. E perchè $y = \frac{xz}{a}$ (7) cioè $z = \frac{ay}{x}$, sostituendo si avrà $dx, dy :: x.\overline{x^2-3y^2}, y.\overline{3x^2-y^2}$.

14. Nel caso dell' ascissa massima AX (F. 3.), nel quale $dx = 0$, si avrà $a^2 - 3z^2 = 0$ (12), cioè $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$, ed $x = AX = \frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (12) $= \frac{a\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}{4}$, ed $XZ = y = \frac{xz}{a} = \frac{a\sqrt[4]{3}}{4}$.

15. E nel caso dell'ordinata massima CD (F. 3.), nel quale $dy = 0$, si avrà $3a^2 - z^2 = 0$ (12), cioè $z = a\sqrt{3}$, ed $x = AC = \frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (12) $= \frac{a\sqrt[4]{3}}{4}$, e $CD = y = \frac{a\sqrt[4]{3}\sqrt{3}}{4} = AX$. (14)

16. Per avere la corda massima $AV = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x\sqrt{a^2+z^2}}{a}$ (7) $= \frac{a\sqrt{az}}{\sqrt{a^2+z^2}}$ (12), se ne trovi il differenziale, il quale ridotto al zero dà $z = a$, onde $AV = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

17. Poichè essendo AV corda massima, $z = a$; sarà $AB = x = \frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (12) $= \frac{a}{2}$, e $BV = y = \frac{az\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (12) $= \frac{a}{2}$. *Dunque* $AB = BV$, e perciò l'angolo BAV della corda massima AV colla verticale AX è semiretto.

18. Facendo $EF, FR :: en, nE :: dy, dx :: y.\overline{3x^2-y^2}, x.\overline{x^2-3y^2}$ (13) si avrà la sottangente FR, e si potrà condurre la tangente di un punto E dato.

19. Volendosi trovare il raggio osculatore EM del punto E dato nella parte AEV della Curva si dica $EM = R$, e poichè AEV è concava all' asse AX, mettendo dx costante sarà (com'è noto) $R = \frac{-ds^3}{dxddy}$. Dal n. 13. si ha $dy = \frac{ydx.\overline{3x^2-y^2}}{x.\overline{x^2-3y^2}}$;

e sostituendo si avrà $dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2.\overline{x^2+y^2}^3}{x^2.\overline{x^2-3y^2}^2}$ la cui radice è $\pm \frac{dx\sqrt{\overline{x^2+y^2}^3}}{x.\overline{x^2-3y^2}}$. Ma al n. 17. si è trovato, che la $AB = x = BV = y$; e facilmente si vede, che a qualunque altro punto della parte AEV della Curva, come al punto E, corrisponde una $x = AF = Fp$, ch'è minore della $y = FE$. Dunque rapporto alla detta parte di Curva sarà $x^2 < 3y^2$; e ds dev' esser positiva. Dunque si dovrà mettere $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{-dx\sqrt{\overline{x^2+y^2}^3}}{x.\overline{x^2-3y^2}}$. In oltre $ddy = \frac{6xy.\overline{dx^2+dy^2}}{x^3-3y^2x} = \frac{6yds^2}{x^2-3y^2}$; onde $R = \frac{\sqrt{\overline{x^2+y^2}^3}}{6xy} =$ (poichè $x^2+y^2 = a\sqrt{xy}$ (8)) $\frac{a\sqrt{axy\sqrt{xy}}}{6xy} = \frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt[4]{xy}} = \frac{a\sqrt{a^2+z^2}}{6\sqrt{az}}$ (12).

20 Poichè $AB = BV$ (17) al punto V si ha $x = y$, e $dx, dy :: x.\overline{x^2-3y^2}, y.\overline{3x^2-y^2}$ (13) $:: -1, 1$, cioè $tu = tV$, e l'angolo tVu è semiretto, il quale coll' angolo tVA pure semiretto (giacchè $AB = BV$) fa l'angolo AVu retto; onde AV è normale alla Curva in V, ed il raggio osculatore del punto V caderà sulla VA. Ma co

 de-

desto raggio è $\frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt[4]{xy}}$ (19) = (poichè $x = y = \frac{a}{2}$ (17)) $\frac{a}{3\sqrt{2}}$, ed $AV = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (16). Dunque presa $VK = \frac{AV}{3}$ sarà VK il raggio osculatore del punto V.

21. E perchè l'ordinata massima CD è normale alla Curva in D il raggio osculatore del punto D cadrà sulla DC. Ma le coordinate del punto D sono $x = AC = \frac{a\sqrt[4]{3}}{4}$, ed $y = CD = \frac{a\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$ (15); dunque $xy = \frac{3a^2}{16}$, ed il raggio osculatore (ch'è $\frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt[4]{xy}}$ (19)) al punto D sarà $= \frac{a\sqrt{3\sqrt{3}}}{9}$. Dunque CD al raggio osculatore DI sarà come $\frac{a\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$ ad $\frac{a\sqrt{3\sqrt{3}}}{9}$ :: 9, 4.

22. Poichè FEn, mEe sono angoli retti, tolto il comune mEn rimarranno i due angoli OEM, nEe eguali nei due triangoli OEM, nEe rettangoli, i quali perciò saranno simili, e si avrà Ee, en :: EM, MO, cioè ds, dy :: R (19), $MO = \frac{Rdy}{ds} = NF$; onde $AN = x + \frac{Rdy}{ds}$ = (sostituendo giusta il

n. 19.) $\frac{3x^2+y^2}{6x}$. In oltre Ee, En :: EM, EO, cioè ds, dx :: R, $\frac{Rdx}{ds} = EO$, onde $FO = FE - EO = y - \frac{Rdx}{ds}$ = (sostituendo giusta il n. 19.) $\frac{x^2+3y^2}{6y} = NM$, essendo M un altro punto della Evoluta $KIMH$; ed in questa maniera si potranno trovare quanti punti si vorranno per descrivere l'Evoluta della porzione VEA della Curva.

23. Poichè AX è normale in A al ramo AED il raggio osculatore del punto A caderà sulla AX. Ma in A la x, e la y sono $= o$. Dunque al punto A il raggio osculatore trovato al n. 19. $= \frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt[4]{xy}}$, e che cade sulla AX, sarà $\frac{a\sqrt{a}}{o}$, cioè infinito.

24. Vengo ora alla considerazione dei tempi. Giusta il n. 4. $\frac{k\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{ax}}$ è il tempo per qualunque corda; e fatte le debite sostituzioni giusta il n. 8. la formola diviene $k\sqrt[4]{\frac{z}{a}}$. Intanto per avere il tempo per esempio per la corda AZ si metta $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$

(14), e si troverà $t.\,AZ = \frac{k}{\sqrt[4]{\sqrt{3}}}$ (intendendo per k il tempo della caduta libera dall' altezza $\underline{a}$ (2)), e sarà codesto anche il tempo della discesa per l' arco AZ.

25. Mettendo $z = a\sqrt{3}$ (15) si troverà $k\sqrt[4]{\sqrt{3}}$ tempo per la corda AD, che sarà anche il tempo per $ArZVD$. E così si potrà avere (date le coordinate) il tempo per qualunque altra corda finita AE, che sarà anche il tempo, che impiegherebbe lo stesso corpo per $ArZDE$, ch'io suppongo sempre trattenuto nella Curva da qualche forza, come se viaggiasse dentro un canale $ArVEA$ tutto chiuso sotto, e sopra.

26. Si sa, che prescindendo da tutte le resistenze il corpo in qualunque punto E ritiene quella velocità, che avrebbe caduto per AF, e che perciò non si ridurrà alla quiete, se non ritornato fino in A. Quanto tempo impiegherà esso per ritornare in A? Finchè la corda Af fosse finita, la z sarà finita, perchè essendo la corda $\frac{a\sqrt{az}}{\sqrt{a^2+z^2}}$ (16) se z fosse infinitesima, la formola della corda diverrebbe $\frac{a\sqrt{az}}{\sqrt{a^2}}$, cioè infinitesima, e se la z fosse infinita, la stessa formola diverrebbe $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{z}}$, cioè pure infinitesima. Dunque perchè la corda sia finita, convien che la z sia fini-

finita; ed il tempo per la corda trovato al n. 24. $k\frac{\sqrt[4]{z}}{a}$ sarà finito; e tale sarà il tempo per la corrispondente porzione di Curva $AZVEf$.

27. Ma se Af sarà corda infinitesima, il tempo per essa sarà infinito. Imperocchè Af sarà anche corda del cerchio osculatore in A, il cui raggio si è trovato infinito (23). Dunque infinito sarà pure il diametro; ed infinito sarà il tempo della caduta lungo quel diametro. Ma eguale si dimostra il tempo della discesa per qualunque corda del cerchio, che parta da quel diametro. Dunque il tempo per la corda infinitesima Af sarà infinito.

28. Lo stesso, ed anche più mostrerò nella seguente maniera. Poichè $\sqrt[4]{z}$ è media proporzionale fra l' unità, e $\sqrt{z}$, cosicchè $\div$ 1, $\sqrt[4]{z}$, $\sqrt{z}$, se sarà z infinita di tal genere, onde riesca $\sqrt{z}$ infinita di secondo genere, sarà $\frac{1}{\sqrt{z}}$ infinitesima di secondo genere, e $\sqrt[4]{z}$ infinita di primo genere. Quindi perchè essendo z infinita $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{z}}$ è una corda infinitesima (26), ed il tempo della discesa per la corda è $k\frac{\sqrt[4]{z}}{a}$ (24), se la corda sarà $Af = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{z}}$ infinitesima di secondo genere il tempo $k\frac{\sqrt[4]{z}}{a}$ sarà infinito di primo genere.

Così se la corda Ab sarà infinitesima di quarto, ò di sesto genere il tempo sarà infinito di secondo, o di terzo genere: Ma i tempi per la corda Af, e per la corda Ab sono anche i tempi per le porzioni di Curva corrispondenti $AZVEf$, $AZVEb$. Dunque il corpo partito da A viaggiando per la curva non arriverà in f, cioè a una distanza da A infinitesima di secondo genere, se non dopo un tempo infinito di primo genere; nè arriverà in b, cioè a una distanza da A infinitesima di quarto, o di sesto genere, se non dopo un tempo infinito di secondo genere nel primo caso, e di terzo genere nel secondo caso.

29. E dovendo il corpo prima di arrivare in A passare per tutti i generi decrescenti di distanze infinitesime da A, col discorso fatto si rende manifesto, che per arrivare in A dovrebbe impiegare un tempo infinito di un genere infinito, cioè che sempre si muoverà verso A senza potervi arrivare mai.

30. Oltre il punto D (F. 3.) avvi un punto E, fin dove il corpo partito da A, e viaggiando per la Curva, preme continuamente quella parte del supposto canale, la quale lo chiude esteriormente alla Curva, e dopo il qual punto il corpo preme la parte opposta del canale, che lo chiude interiormente alla Curva; di modo che se il canale fosse tutto aperto interiormente alla Curva, il corpo arrivato al descritto punto E abbandonerebbe la Curva, descrivendo in appresso una parabola conica ETG.

31. Per trovare codesto punto E esprima EP il peso del corpo, il qual peso (fatto il rettangolo QS) equivale alle due forze laterali ES, EQ, ed alla EQ dev' esser eguale la forza centrifuga del corpo in E. Poichè $Ee, en :: EP, EQ$, sarà $ds, dy :: EP, \frac{EP.dy}{ds} = EQ$. E perchè la velocità in E è quella della caduta per l'ascissa $AF = x$, sarà $EM (= R), 2AF (= 2x) :: EP, \frac{2x.EP}{R}$, valore della forza centrifuga suddetta $= EQ$, onde si ha $\frac{2x}{R} = \frac{dy}{ds}$. Sostituendo i valori delle dy, ds, R trovati al n. 19. si trova $y = x\sqrt{15} = \frac{xz}{a}$, e perciò $z = a\sqrt{15}$; onde $x = \frac{a^2\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (11) $= \frac{a\sqrt{\sqrt{15}}}{16} = AF$, ed $y = FE = \frac{az\sqrt{az}}{a^2+z^2}$ (11) $= \frac{a\sqrt{15\sqrt{15}}}{16}$.

32. E perchè $EF, FR :: en, nE :: dy, dx :: x.\overline{3a^2 - z^2}, a.\overline{a^2 - 3z^2}$ (12), $ez = a\sqrt{15}$ (31), sarà $EF, FR :: 3\sqrt{15}, 11$. Giusta le regole della Balistica dev' essere LE (distanza dell' asse TL da E) $= \frac{2.AF.FE.FR}{ER^2} = \frac{33a\sqrt{15\sqrt{15}}}{8.256}$, e TL dev' essere $= \frac{AF.\overline{FR}^2}{\overline{ER}^2} = \frac{121a\sqrt{\sqrt{15}}}{16.256}$,

d'onde si trova FE, LE : : 128, 33, ed AF, TL : : 256, 121.

33. Data la AC (F. 2.) di posizione, descrivere la Curva AiC finora esaminata, che partendo da A passi pel punto C.

Poichè la AC è data di posizione, saranno date anche le AB, BC, cioè saranno note in questo caso le coordinate x, y nella equazione $x^2 + y^2 = a\sqrt{xy}$ del num. 8, e pertanto per costruire la Curva AiC la costante $a = AF$ sin qui considerata arbitraria, in questo caso sarà determinata, cioè sarà $a = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy}}$, che sarà il parametro della parabola FM, colla quale col metodo del n. 9. si potranno avere quanti altri punti i, che si vorranno, per descrivere la ricercata Curva AiC.

34. L'altra parte AcQ della Curva può servire allo stesso problema nell'ipotesi di una gravità negativa, o sia di una gravità, che allontani i corpi dal centro della Terra, e gli spinga da A verso R.

35. Il chiarissimo nostro Sig. Malfatti avendogli io indicata l'idea di questa mia indagine, ha trovato, che questa Curva è quella di un caso particolare della Curva del Cassini, la quale abbia l'asse LV (F. 4.) ad angolo semiretto colla verticale AH, e nella quale il rettangolo di due rette NC, RC tirate da due fochi N, R a un punto qualunque C della Curva sia sempre eguale al quadrato della AR, o della AN.

36. In fatti si prenda $AR = \frac{a}{2}$. Poichè $AH =$

HR (17) sarà $\overline{AH}^2 = \frac{\overline{AR}^2}{2} = \frac{a^2}{8}$; onde $AH = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, e questa si dica $= m$; e perciò sarà $m = AH = HR = AD = DN$; ed essendo $AB = x$, e $BC = y$, sarà $NE = ND + AB = m + x$, $EC = AD + BC = m + y$; $NC = \sqrt{\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2}$; $CI = AH - AB = m - x$, $IR = HR - BC = m - y$, $CR = \sqrt{\overline{m-x}^2 + \overline{m-y}^2}$; $NC . CR =$

$$\sqrt{\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2} . \sqrt{\overline{m-x}^2 + \overline{m-y}^2} = \sqrt{4m^4 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 8m^2xy} = \sqrt{\frac{a^4}{16} + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2xy} = (8)$$

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}} = \frac{a^2}{4} = \overline{AR}^2,$$ come richiede la natura della suddetta Curva Cassiniana.

Ferrara 7. Luglio 1780.

TEODORO BONATI.

E' anche la Lemniscata del Fagnani.

APPENDICE.

Data la x della equazione $y^4 + 2x^2y^2 - a^2xy + x^4 = 0$ trovata al. n. 8. colle regole ordinarie si trova, che la y non può avere, che due valori reali, e sono i seguenti ambi positivi.

$y = u \pm \sqrt{\frac{a^2x}{u} - x^2 - u^2}$, essendo $u = \sqrt{z - \frac{x^2}{3}}$

$$e\ z = \sqrt[3]{\frac{2a^4x^2}{256} - \frac{x^6}{27} + \frac{a^2x^2}{8}\sqrt{\frac{a^4}{256} - \frac{x^4}{27}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{2a^4x^2}{256} - \frac{x^6}{27} - \frac{a^2x^2}{8}\sqrt{\frac{a^4}{256} - \frac{x^4}{27}}}$$

valori in vero molto complicati.

Con un mio metodo, che si estende a tutte le equazioni di qualunque grado, trovo per approssimazione le stesse due radici senza radicali nella seguente maniera.

Nella formola $\frac{3y^4 + 2x^2y^2 - x^4}{4y^3 + 4x^2y - a^2x}$ $\boxed{H}$ si metta prima $y = 0$, e si avrà $\frac{x^3}{a^2}$, ch'è un primo limite della radice minore, e questo si dica A. Questo valore A noto sostituito in H in luogo della

y darà $\frac{3A^4 + 2x^2A^2 - x^4}{4A^3 + 4x^2A - a^2x}$, che sarà un secondo limite più prossimo alla stessa radice minore, e questo si dica B. Sostituendo B, valore noto, pure in H in luogo della y si avrà

$\frac{3B^4 + 2x^2B^2 - x^4}{4B^3 + 4x^2B - a^2x}$, che si dica C terzo limite vieppiù prossimo alla radice. E così si potranno trovare altri limiti sempre più prossimi alla radice quanto si vorrà; e tai limiti A, B, C, ec. sono così convergenti, che molte volte il terzo si può contare per radice prossima, e quando si troverà, che un limite è molto prossimo al precedente, egli è questo un indizio, che quel limite è anche molto prossimo alla radice.

Per avere l'altra radice ricercata si metta in H prima $y = x$, e si avrà il primo limite $\frac{4x^3}{8x^2 - a^2}$ $= M$. Sostituendo questo valore in H in luogo della y se ne avrà un altro N più prossimo; e sostituendo questo pure in H in luogo della y se ne avrà un altro O, ec. E di questi valori M, N, O, ec. vale parimente ciò, che dissi dei valori A, B, C, ec.

Se essendo l'equazione numerica si troverà un limite espresso da una frazione, la quale possa ridursi a numero intiero con una piccola aggiunta, o detrazione, sarà lecito il ridurla così a intiero per maggior comodo del calcolo. Come se si trovasse

$N = \frac{20}{9}$ si può mettere $N = 2$, e sostituire in H il 2 in luogo della y, per avere un terzo limite, che tuttavia sarà sensibilmente più prossimo alla radice, che il limite N.

Si veda il tomo VIII. della Società Italiana stampato in Modena nel 1799.

COROLLARJ.

Per le cose dette s' intende

1. Che il tempo per un qualunque arco MN (Fig. 5.) è la differenza dei tempi per le due corde AM, AN condotte dal punto sommo A della Curva ai due estremi M, N dell' arco.

2. Che un corpo partito da un qualunque punto P della orizzontale AP, e disceso per la tangente PR, se in seguito sarà ritenuto da un canale nella curva vi si muoverà come se fosse disceso per l' arco AR.

3. Che un corpo partito da un qualunque punto H della orizzontale AH discenda per la tangente HI ritenuto che sia da un canale nella curva arriverà in I, in E, in N, in M, ec. colle stesse velocità che vi avrebbe in senso contrario, se partito da A avesse viaggiato per la curva $AMNEI$; e che i tempi per $INRA$, per $NMRA$, per MRA, ec. saranno quei delle discese per le corde AI, AN, AM ec.

4. Ai numeri 30, 31 supposi che un corpo partendo da A si movesse (Fig. 3.) per un canale $ArZVE$ ec. chiuso esteriormente, e trovai il punto E, dove il corpo abbandona la curva, e descri-

ve una parabola ETG. Quel punto E fu poi denominato dal Sig. Malfatti *Punto di distacco*. Similmente si trova che se il corpo disceso per la tangente HI (Fig. 5.) sarà ritenuto nella curva da un canale IEN aperto esteriormente, arrivato allo stesso punto E abbandonerà la curva, ed anderà per Em continuazione del ramo tE della parabola descritta al n. 31.

Ferrara 20. *Giugno* 1807.

TEODORO BONATI.

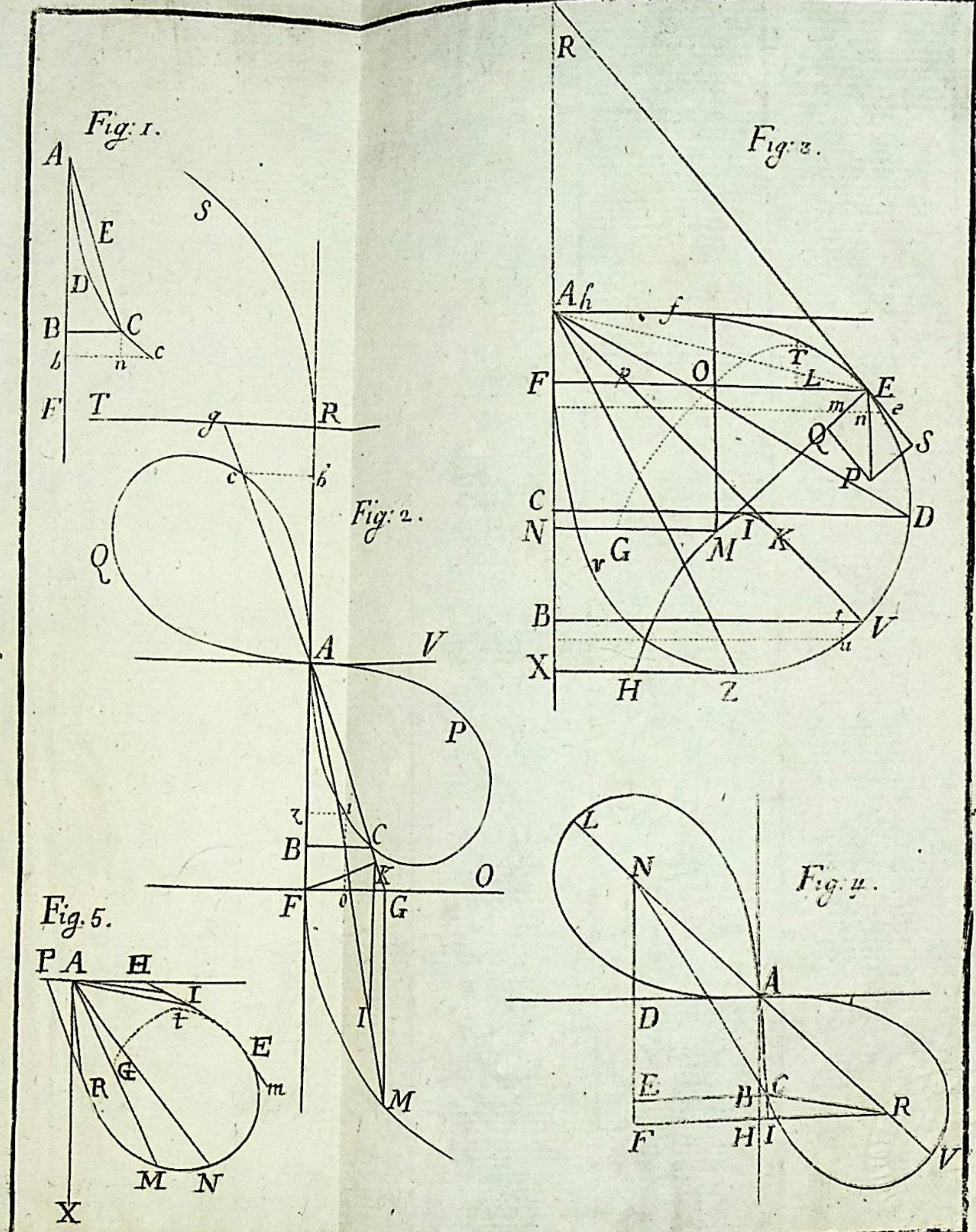
Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig. 5.