Il fiume come laboratorio matematico: alcuni esempi di attività di campo.

Giuliana Gnani (Università di Ferrara)
Cristian Veronese (I.C. Porto Tolle, Rovigo)

Estratto da: Indicazioni nazionali per il curricolo

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il **laboratorio**, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui **l'alunno è attivo**, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, **impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati**, porta a **conclusioni** temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata **visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare** e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi **problemi significativi** e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.

Le attività proposte come compiti di realtà: attraverso spunti storico epistemologici sono proposte attività di campo e laboratoriali volte a consolidare e a potenziare il grande settore della proporzionalità

Abilità

- Costruire figure piane
- Rappresentare figure sul piano cartesiano
- Riduzioni in scala
- Risolvere proporzioni e problemi
- Saper verificare congetture
- Utilizzare strumenti informatici

Nuclei tematici coinvolti

- Numeri e algoritmi
- Spazio e figure
- Relazioni funzioni
- Misura

Collegamenti pluridisciplinari

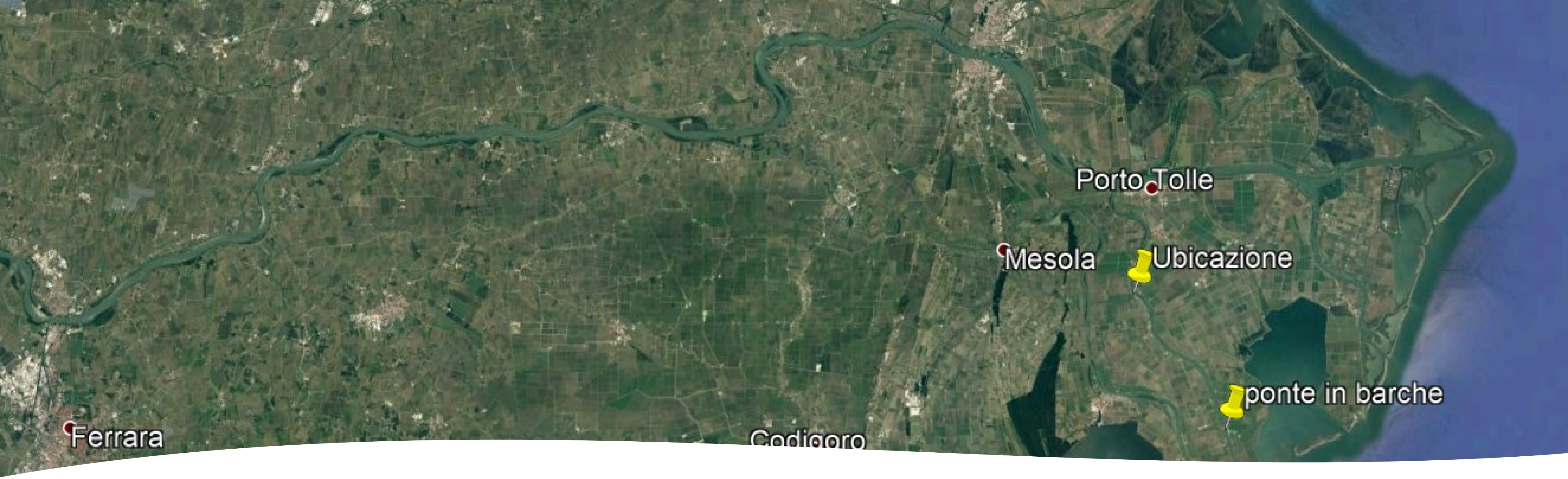
- Lettere
- Storia
- Geografia
- Scienze
- Tecnologia
- Ed. Fisica

Competenze disciplinari

- Riconoscere e determinare le forme del piano, la loro rappresentazione e raccogliere le relazioni tra gli elementi
- Riconoscere e risolvere problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza

Competenze chiave

- Comunicazione nella madrelingua
- Competenze matematiche e competenze di base in tecnologia
- Competenze digitali
- Imparare a imparare
- Spirito di iniziativa e di imprenditorialità

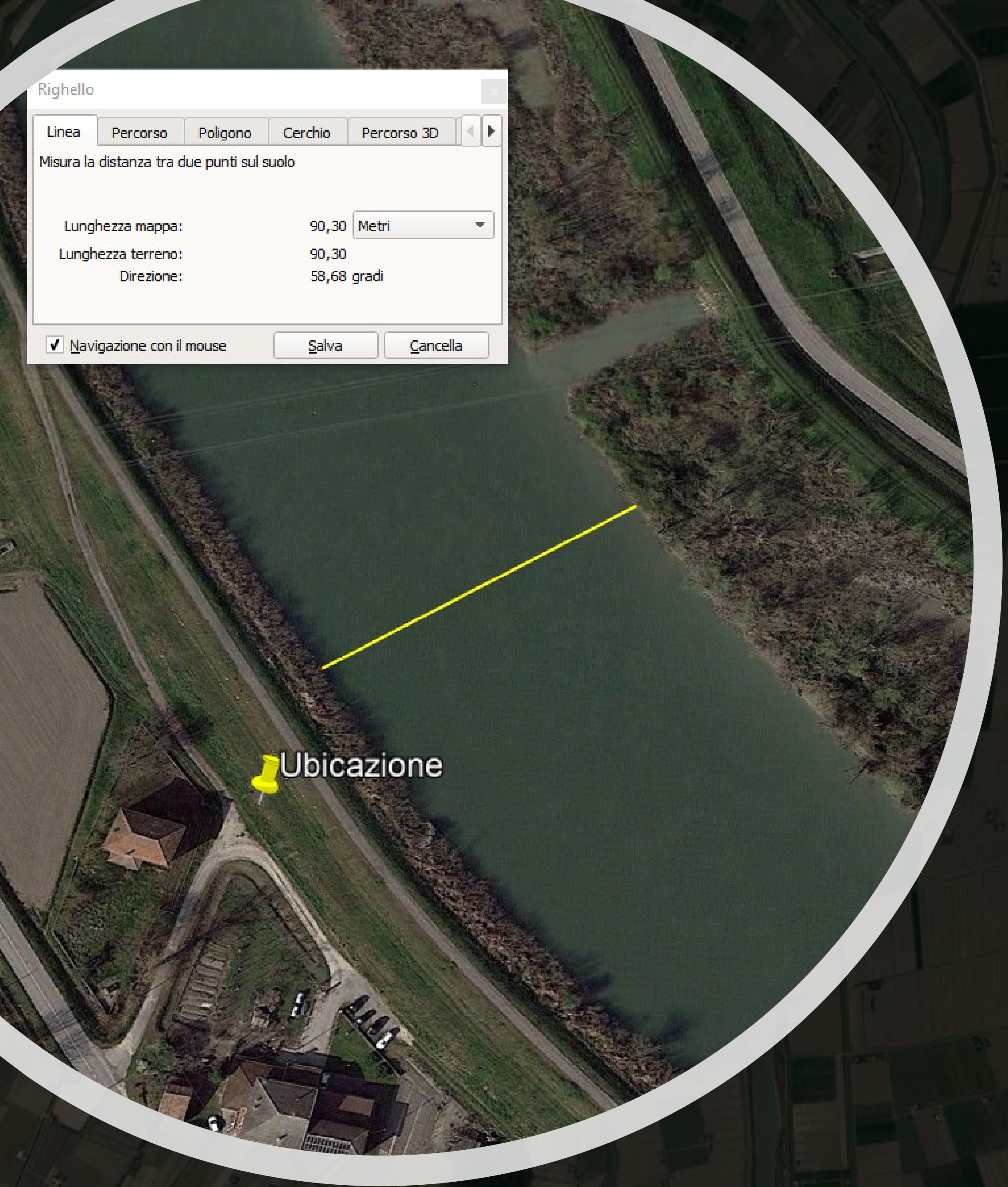


Dove sono state eseguite le attività

I luoghi in cui sono state effettuate le attività sono collocati nel cuore dell'estremo Delta del Po, tra i comuni di Taglio di Po e Porto Tolle.

La misura della larghezza del fiume è stata eseguita nei pressi all'unghia arginale in destra idrografica al ramo deltizio denominato *Po di Gnocca*.

Qualche chilometro più a valle è presente un caratteristico ponte in chiatte, che collega l'isola di Ariano con l'isola della Donzella (nel Comune di Porto Tolle).

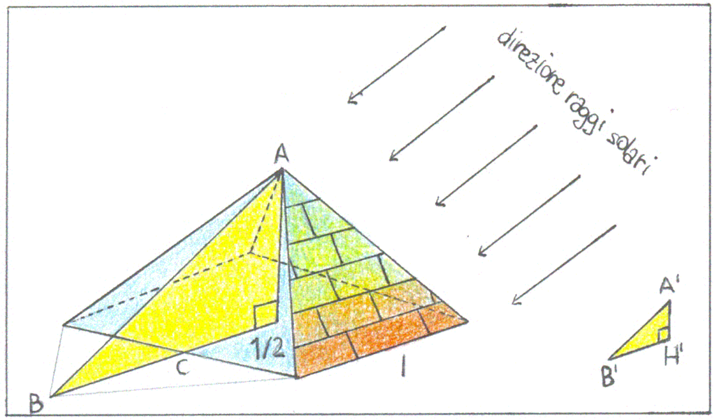


Prima attività: calcolo della larghezza del fiume

Riferimento storico, epistemologico: Talete di Mileto (624 A.C. Mileto - 547 A.C. Mileto)

Come calcolare l'altezza di una piramide con un bastone

Dalla fig. 1 si può stabilire una proporzione tra i lati corrispondenti dei triangoli rettangoli simili ABH e A’B’H’, ossia *x:A’H’=HB:H’B’* dove *x=AH* (altezza della piramide), *A’H’* è l’altezza del bastone, *B’H’* ne è la sua ombra sul terreno e HB è composto dal segmento BC (perpendicolare allo spigolo della piramide) e dalla metà base della piramide.



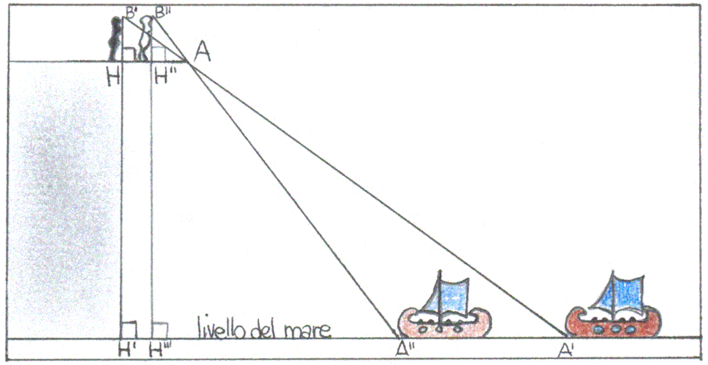
Pertanto

$$x = \frac{HB}{H'B'} \cdot A'H'$$

Attività di campo: calcolare l’altezza di un lampione, di un albero, ecc. con questa metodologia.

Come calcolare la distanza di una nave dalla costa

Sempre in ambito pratico inerente alla proporzionalità dei lati di triangoli simili, pare che Talete riuscisse a calcolare la distanza di una nave dalla costa (fig. 2.1.2).Dalla fig.2 si ricava la distanza incognita *x=H’A’* dalla proporzione dei lati corrispondenti dei triangoli rettangoli simili *ABH* e *A’BH’*; si avrà *H’B:HB=x:HA* dove *HB* è l’altezza dell’occhio della sentinella, *H’B* è composto da *HH’* (altezza nota del dirupo dal livello del mare) e da *HB, HA* è la distanza a cui si deve posizionare la sentinella per traguardare l’estremo della pedana con la punta della nave.



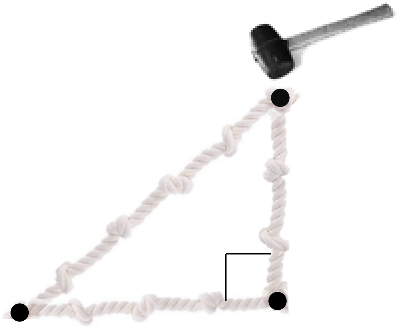
Si avrà

$$x = \frac{\overline{H'B}}{\overline{HB}} \cdot \overline{HA}$$

Analogamente si ragiona sui triangoli rettangoli simili *AB’H’’* e *A’’B’H’’’* con la nave nella nuova posizione *A’’*.

Sembra che i principi che stanno a fondamento del calcolo della distanza incognita di una nave fossero tuttavia già noti in Egitto e in Mesopotamia, tuttavia pare che Talete avesse dato un sensibile contributo alla loro organizzazione razionale

Classe III
Scuola
Secondaria
di I Grado



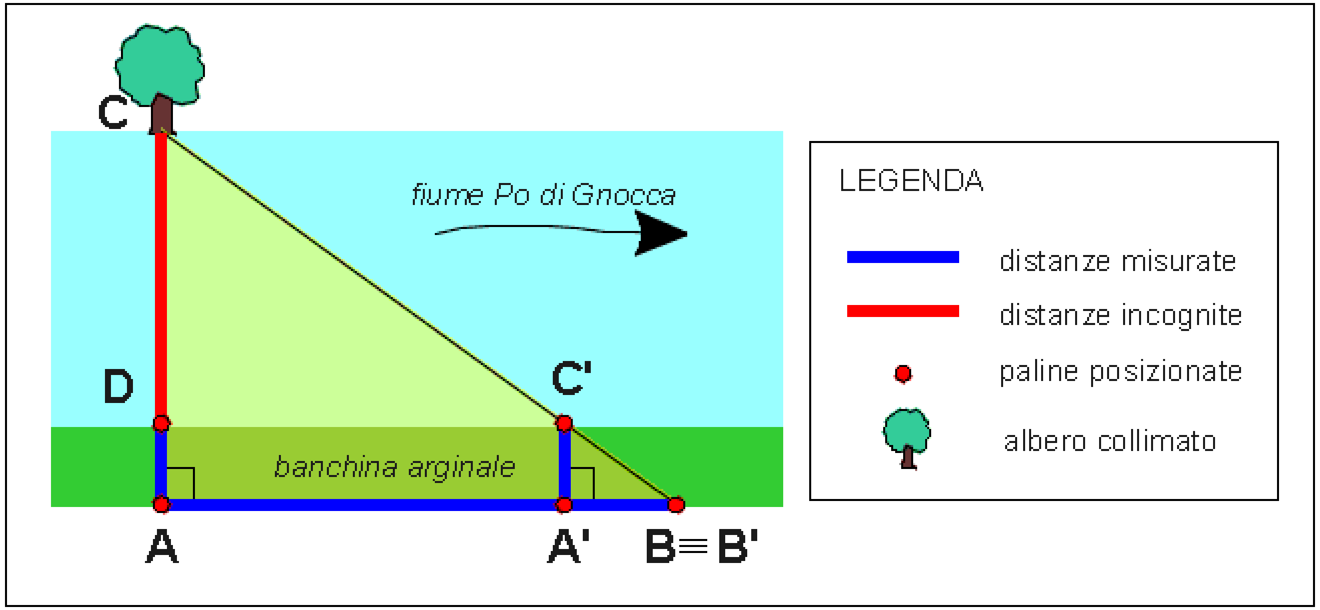
Materiale occorrente

- n.5 paline in legno
- n.1 squadro agrimensorio (alternativa ''egiziana'': corda con 12 nodi equidistanti, n.3 picchetti e martello)
- n.1 cordella metrica
- libretto di campagna

Calcolo della larghezza di un fiume con i triangoli SIMILI

Attraverso la similitudine dei triangoli è possibile misurare la larghezza del fiume Po indirettamente con l'impiego di paline in legno opportunamente posizionate su una delle due sponde arginali e traguardando un oggetto sull'altra sponda, nel nostro caso un albero. Il metodo viene attribuito a *Talete* di Mileto; utilizzando la similitudine dei triangoli venivano stimate anche le distanze di oggetti per esempio quella delle navi dalla linea di costa.

Fase 1: il rilievo di campagna



Vista in pianta

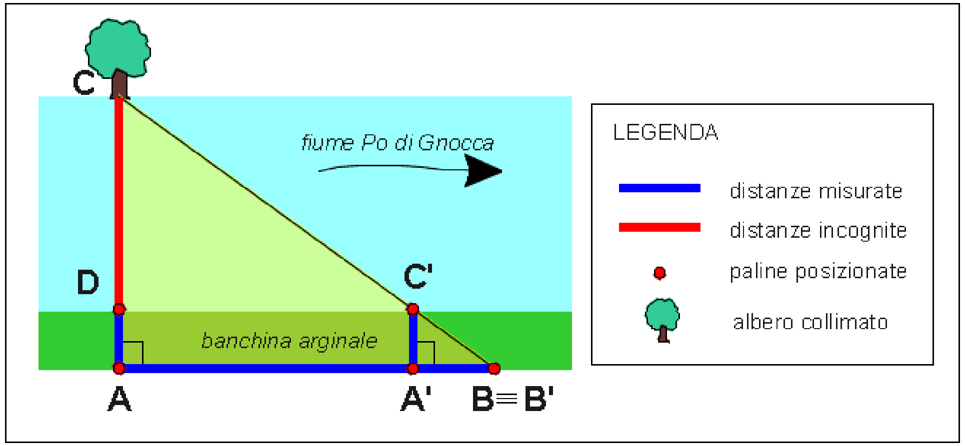
Calcolo della larghezza di un fiume con i triangoli SIMILI

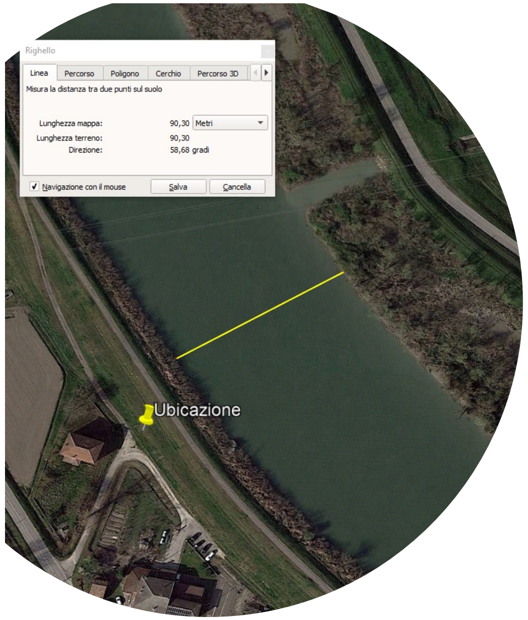
Fotomosaico del rilievo eseguito

Alcune fasi delle misure di campagna

Calcolo della larghezza di un fiume con i triangoli SIMILI

Fase 2: il calcolo in classe e controllo su mappa





Dall'esame di figura si deduce che i due triangoli ABC e A'B'C' sono simili in quanto hanno gli angoli corrispondenti congruenti (gli angoli in B e in B' sono congruenti perché coincidenti, l'angolo in A è congruente all'angolo in A' perché entrambi retti e di conseguenza l'angolo in C è congruente all'angolo in C'). I due triangoli, per il I° criterio di similitudine, avranno allora i lati corrispondenti in proporzione e cioè:

$$AB:A'B'=AC:A'C'$$

Poiché il rapporto fra segmenti è uguale al quoziente delle loro misure misure

$$\overline{AC}=(\overline{AB}/\overline{A'B'})\cdot\overline{A'C'}$$

Essendo $\overline{AD}$ *noto e* $\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}$

possiamo calcolare $\overline{CD}$

Le distanze misurate con cordella metallica sono state le seguenti: $\overline{AB}=79{,}13m$ $\overline{A'B'}= 3{,}98m$ $\overline{A'C'}=\overline{AD}=5{,}25m$

da cui deriva, applicando le relazioni viste sopra $\overline{CD}$=99,13 m a cui, per precisione si deve togliere la porzione di golena di 9m, ottenendo alla fine una misura di 90,13 m.

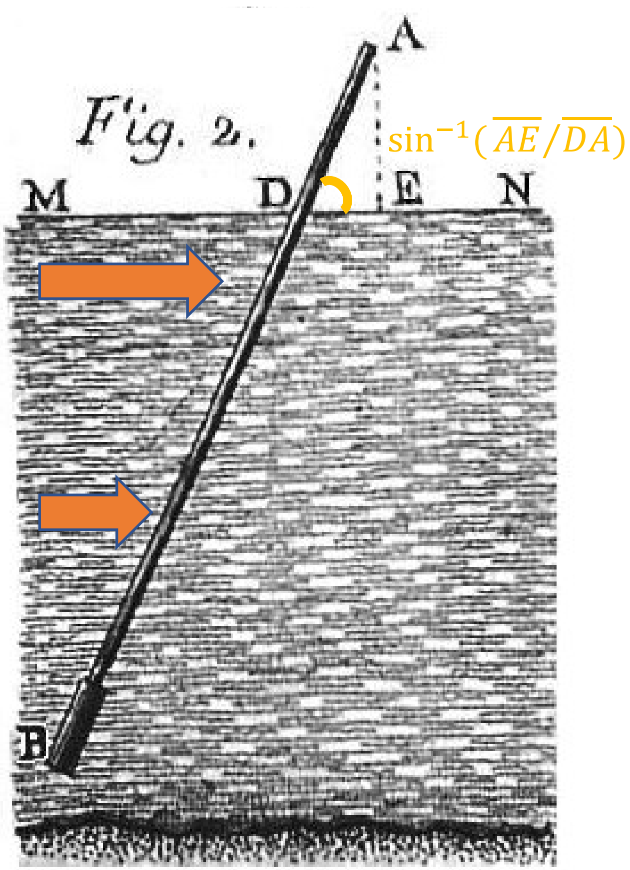
Seconda attività: calcolo della portata di un fiume

Proposta per classi II e III Secondaria di I Grado

Antichi strumenti per la misura della velocità della corrente: i tachimetri idraulici es. ''Asta ritrometrica'' del ferrarese Teodoro Bonati

Ritratto di Teodoro Bonati presso Palazzo San Crispino a Ferrara

SE ad un' Asta AC (fig. 1.) di legno più leggiero dell' acqua si aggiunga una tal porzione CB di metallo, che mettendo tutta l' asta in una acqua stagnante essa galleggi con una porzione AD di un piede o più, fuori dell' acqua ed a piombo, si avrà una delle *Aste ritrometriche* da me proposte nel 1784. in questa Raccolta per iscoprire le velocità sotto la superficie dell' acqua nei fiumi. Mostrai, che se la stess' asta AB (fig. 2.) messa in un' acqua corrente da M verso N verrà portata colla porzione AD inclinata all' avanti, la velocità maggiore starà alla superficie; e che si avrà il contrario se la parte AD penderà all' indietro.



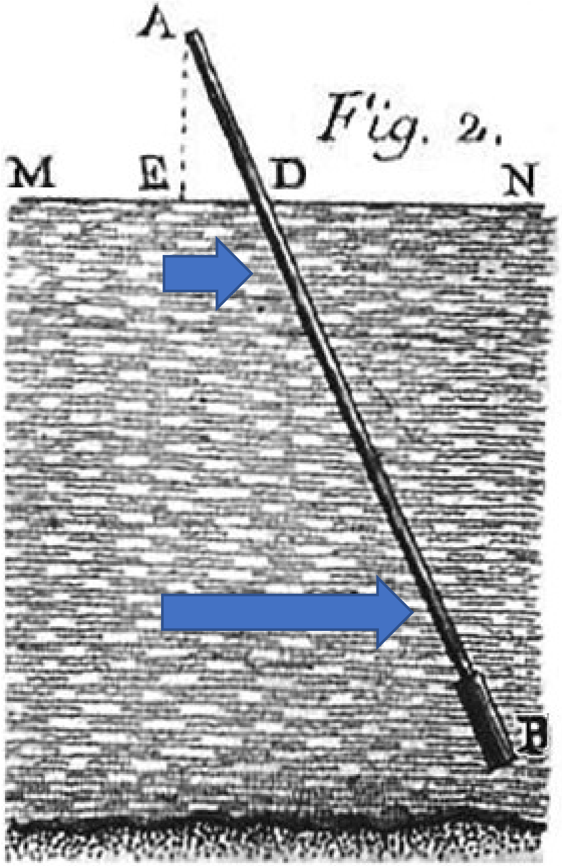
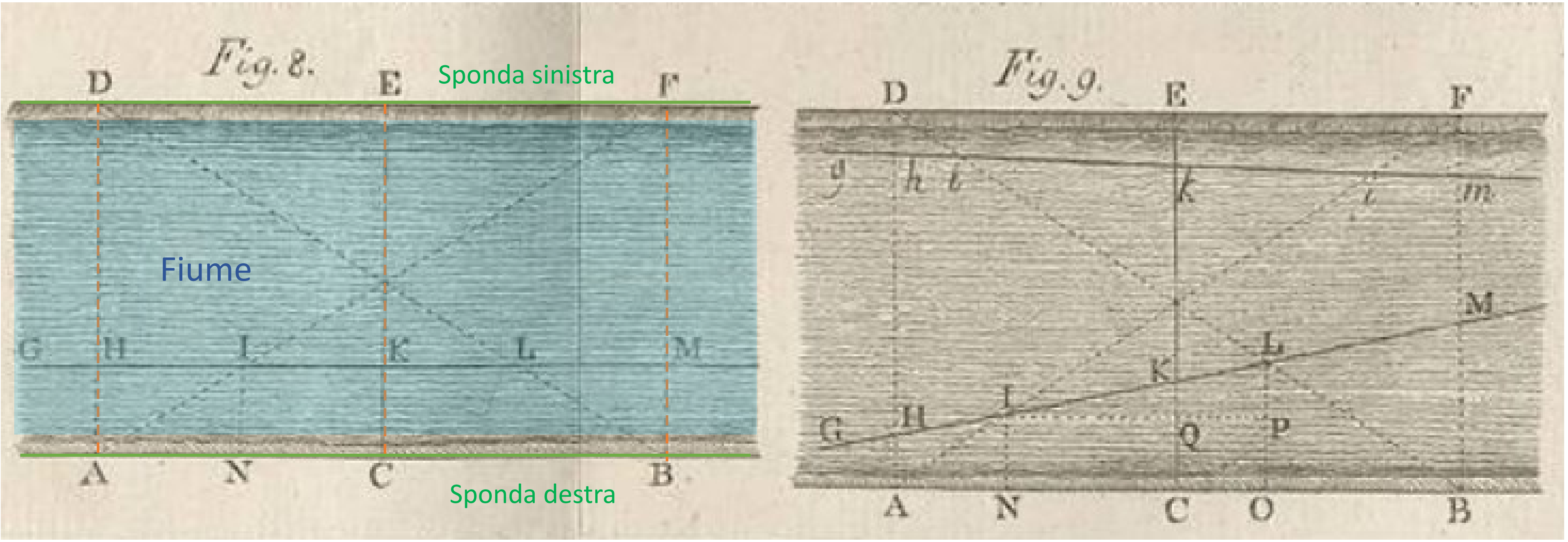


Immagine modificata dallo scrivente, dal testo del Bonati (a sinistra).

Tratto da: T. Bonati, Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un'Acqua corrente (1799)

Come il Bonati proponeva di misurare la velocità della corrente del fiume Po

''Preparate cosi le cose , e collocati tre osservatori ai punti A , C , B , venga da G un'asta portata dall' acqua per una linea retta GHM, e gli osservatori diano il segno dell'arrivo dell'asta ai punti H, I , K , L , M , e con un orologio a secondi…''

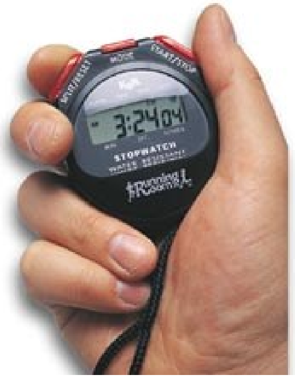


''Ce se si temesse del parallelismo della GM colla AB (…fig.9), s'intenda condotta anche la LO normale alla AB.''

Tratto da: T. Bonati, Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un'Acqua corrente (1799)

Materiale occorrente

- Ancora con cima
- Cordella metrica
- Cronometro
- Libretto di campagna
- Legnetti grezzi o altro materiale ecocompatibile con Ps<1



Vista in pianta (dall'alto del ponte)

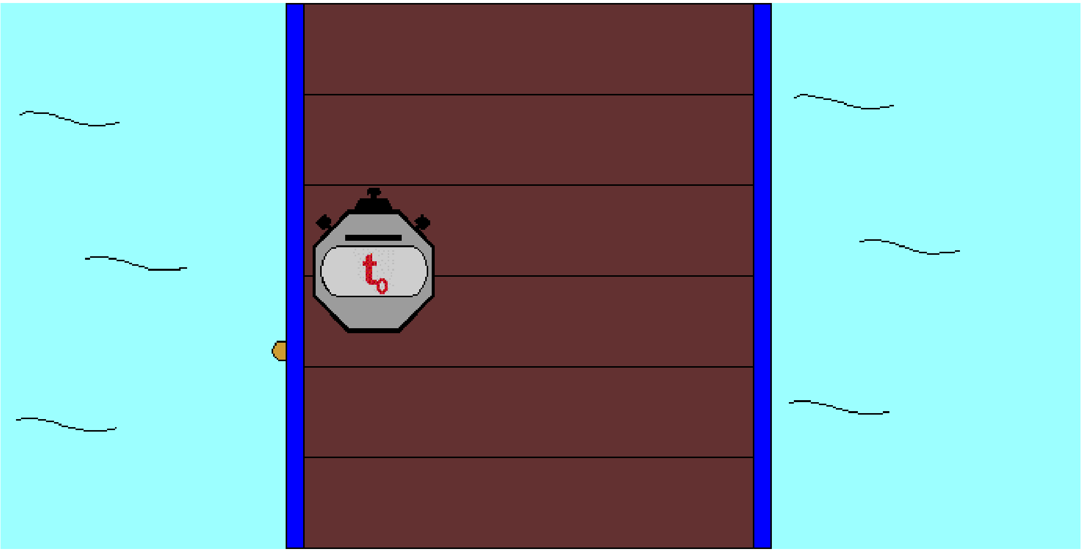


Tabella con dati sperimentali e calcolo velocità

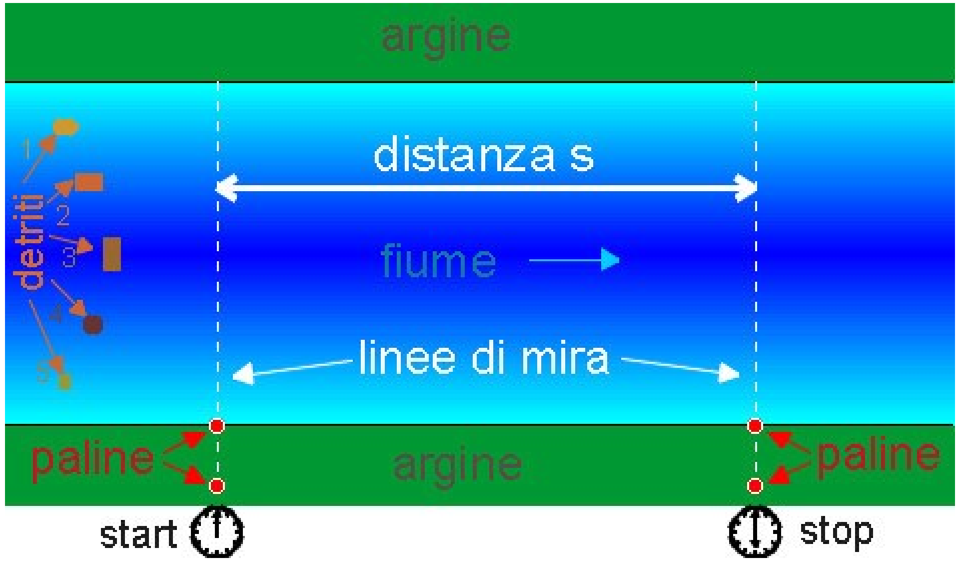
punto N°	spazio (metri)	tempo (secondi)	velocità (m/s)
1	6,20	21,3	0,29
2	6,20	9,23	0,67
3	6,20	7,33	0,84
4	6,20	8,90	0,70
5	6,20	9,18	0,68
6	6,20	9,50	0,65
7	6,20	18,40	0,34

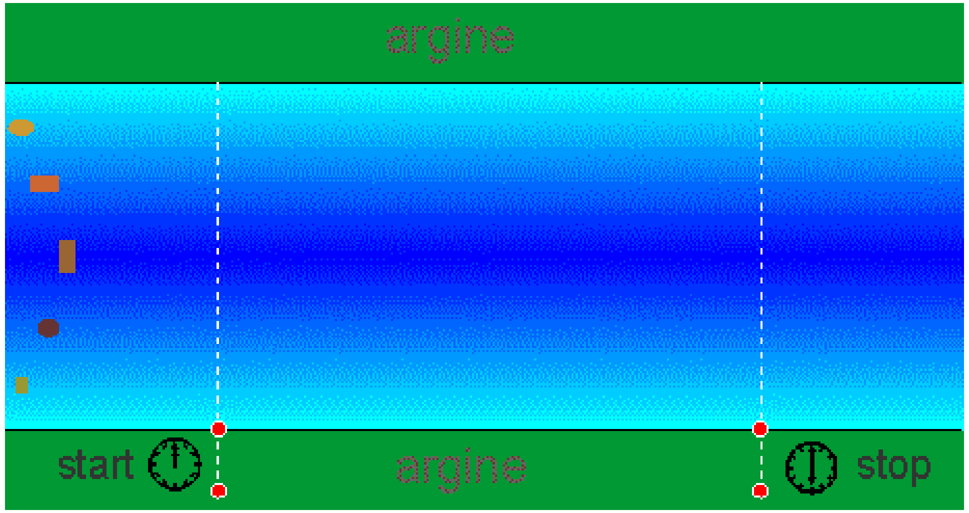
Dalla tabella si può ricavare la velocità media (per semplicità si calcola la media aritmetica), che risulta pari a **Vm=0,60 m/sec**. I ragazzi hanno così preso dimestichezza con il calcolo della velocità come esempio di **rapporto tra grandezze non omogenee**.

Fase 1: calcolo della velocità della corrente fluviale

Abbiamo calcolato la velocità della corrente in vari punti significativi, secondo la seguente metodologia: con l'impiego di alcuni legnetti e di un cronometro, abbiamo lasciato cadere il pezzetto di legno sul lato a monte del ponte e non appena questo ha toccato l'acqua, si è fatto partire il cronometro attendendo sul lato a valle del ponte, per fermarlo non appena questo ricompariva. Dopo aver misurato la larghezza del ponte, risultata pari a S=6,20m, abbiamo calcolato la velocità della corrente in ogni punto di misura applicando la formula **V=s/t** .

Metodo alternativo "di novembre"





Calcolo della velocità della corrente da una sponda

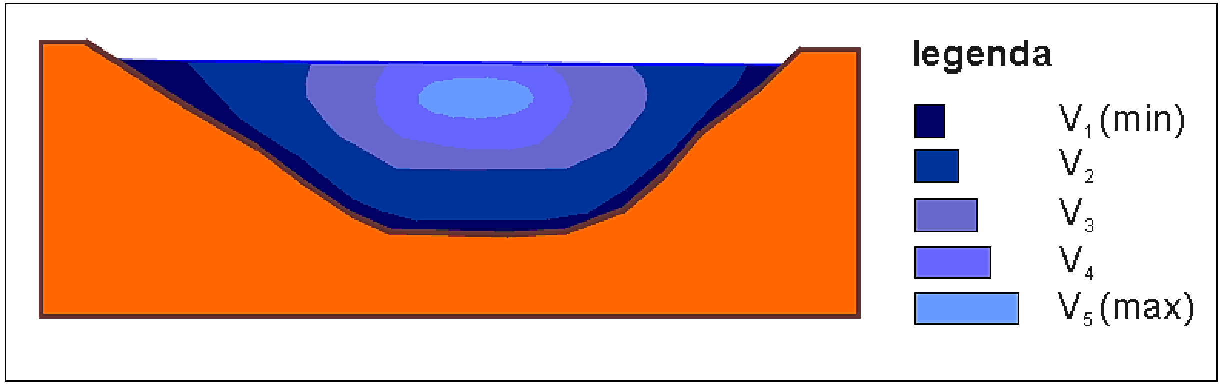
Non sempre si ha la fortuna di avere un ponte in barche che permetta di calcolare la velocità media della corrente! Con il metodo seguente lo si può fare standosene comodamente su una delle due sponde del fiume.

Tale metodo risulta applicabile durante il periodo di piena, quando in fiume trasporta una grande quantità di detriti, in genere rami e tronchi d’albero.

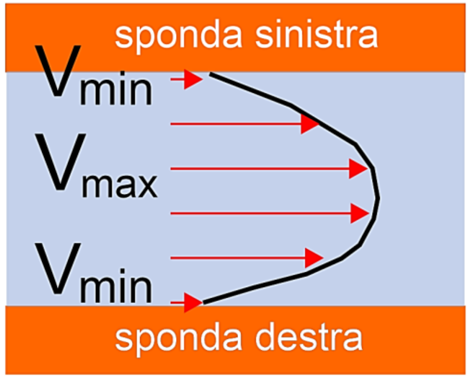
n. detrito	dist. s (m)	tempo (s)	velocità(m/s)
1		0,0	
2		0,0	
3		0,0	
4		0,0	
5		0,0	

Approfondimento teorico

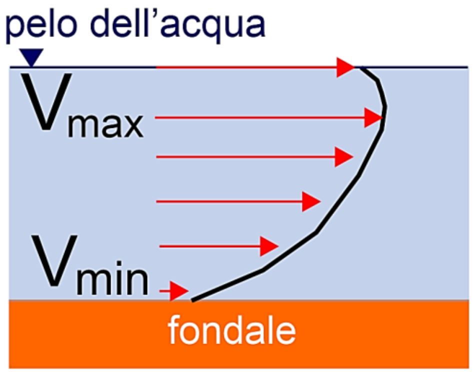
Il calcolo eseguito riguarda la velocità superficiale della corrente al fine di determinarne un valore a livello di ordine di grandezza. In realtà il deflusso dell'acqua è complesso e risulta intrinsecamente legato al profilo dell'alveo e in particolare all'attrito con le sponde, con il fondo nonché con l'atmosfera. Per un alveo di forma regolare le fasce di velocità possono essere schematizzate dal seguente profilo.



Sezione trasversale



Pianta

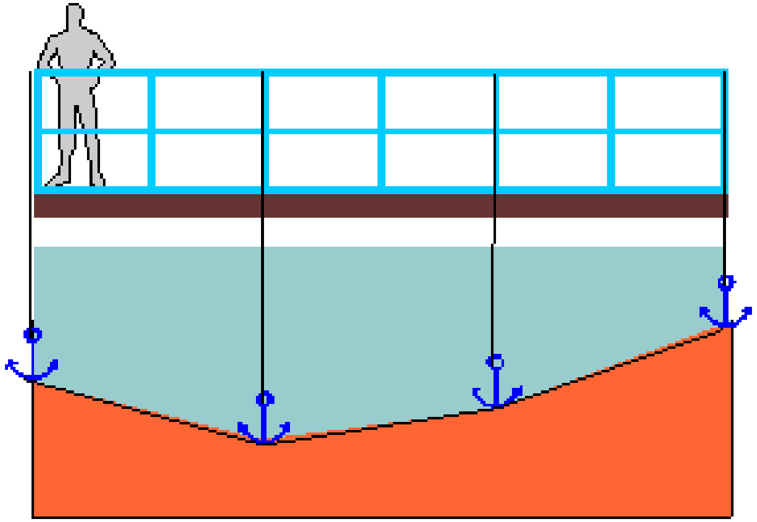


Sezione longitudinale

La massima velocità si ha in corrispondenza del filone centrale (V_5) appena sotto il pelo dell'acqua in cui si ha il minor attrito causato dall'alveo e dal vento in superficie. Per forme irregolari del profilo si avranno situazioni delle fasce di velocità più complesse.

Fase 2: calcolo della sezione

Il ponte in chiatte sul Po di Gnocca ha permesso di procedere facilmente alla misura del profilo del fiume, data la sua lieve altezza rispetto al pelo dell'acqua. E' stata usata la seguente metodologia: con cordella metrica sono stati identificati sul ponte degli intervalli di lunghezza di 5 m; per ciascuno di questi punti prefissati (un maggior dettaglio si poteva ottenere con un passo minore), viene eseguita una misura di profondità gettando in acqua un'ancora legata ad una fune, sino al suo adagiarsi sul fondale, con l'accortezza di mantenere la corda tesa e il più possibile lungo la verticale. A questo punto, dopo aver fatto un nodo sulla corda in allineamento al punto di riferimento (identificato con il corrimano della ringhiera del ponte) è stata tirata su l'ancora e misurata con cordella metrica la lunghezza m (distanza dalla punta dell'ancora sino al nodo), a cui verrà poi sottratta la distanza d dal corrimano al pelo dell'acqua (valore costante pari a d=2,30m). Dunque la distanza dal pelo dell'acqua sino al fondo è data da p=m-d.



Profilo trasversale del fondale fluviale

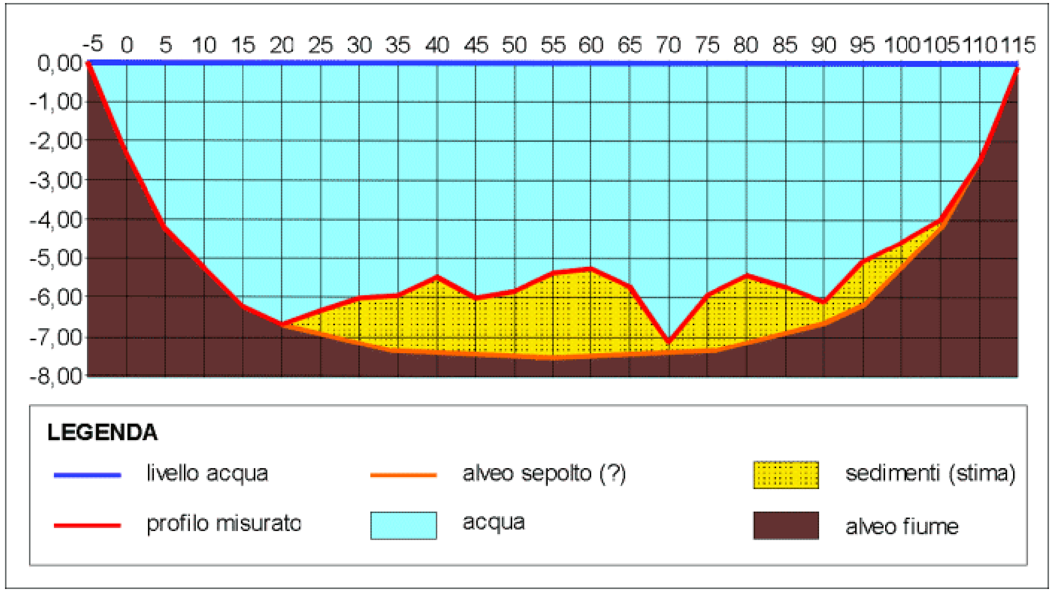
Usando una tabella vengono annotate le distanze progressive, a prefissati intervalli (5m) e la profondità del fondale.
Si procede successivamente alla costruzione del profilo del fiume attraverso la riduzione in scala dei dati misurati, su uno o più fogli di carta millimetrata.
Lo stesso profilo lo si può ricavare utilizzando un foglio di calcolo su un notebook. Nel diagramma successivo si è proceduto al plottaggio con due scale orizzontale e verticale differenti per ovviare all'effetto appiattimento del profilo.

Tabella con dati di misura

Punto N°	Distanza progressiva (m)	Profondità (m)
1	0	-2,30
2	5	-4,22
3	10	-5,20
4	15	-6,20
5	20	-6,65
6	25	-6,30
7	30	-6,00
8	35	-5,90
9	40	-5,45
10	45	-6,00
11	50	-5,80
12	55	-5,35

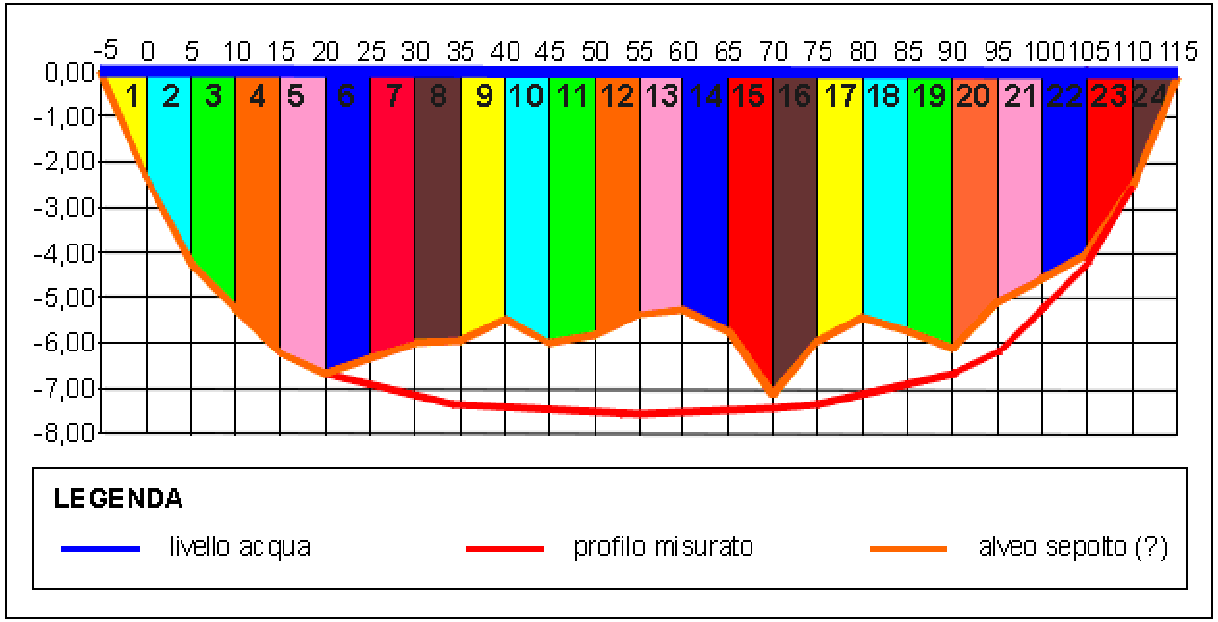
Punto N°	Distanza progressiva (m)	Profondità (m)
13	60	-5,25
14	65	-5,70
15	70	-7,10
16	75	-5,90
17	80	-5,40
18	85	-5,70
19	90	-6,10
20	95	-5,05
21	100	-4,55
22	105	-4,00
23	110	-2,50

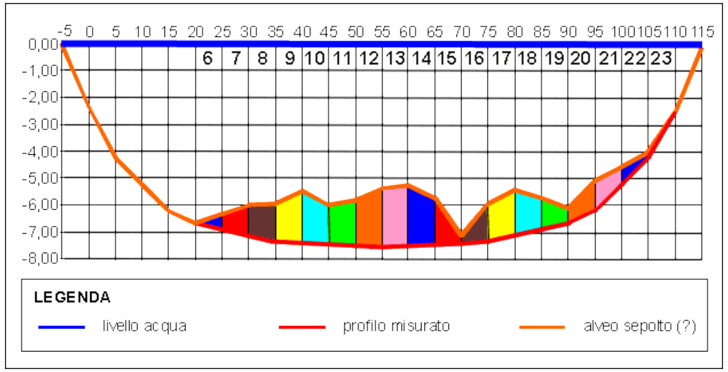
Profilo trasversale



Calcolo della sezione del fiume

Una volta ottenuto il profilo, si procede al calcolo delle aree i-esime come mostrato di seguito. I ragazzi non avranno alcuna difficoltà nel calcolo: si tratta sempre di trapezi (tranne per le figure di inizio e chiusura 1 e 24 che sono triangoli rettangoli). La sezione si ottiene dalla sommatoria delle aree i-esime. Nella tabella le distanze sono espresse in *m* e le aree in *m²*.

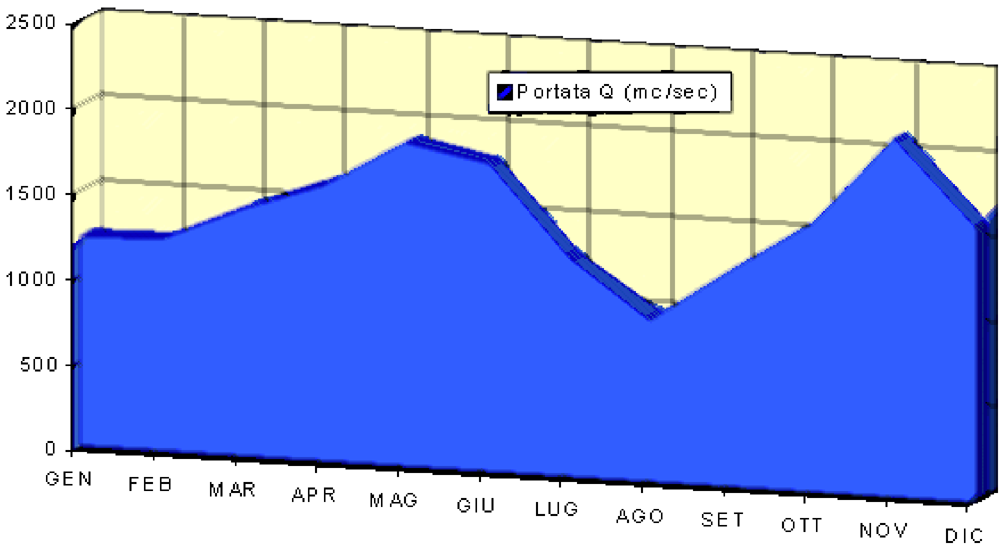




Con lo stesso metodo di calcolo si potrebbe inoltre stimare la sezione occupata dai sedimenti giacenti sul fondo dell'alveo originario.

id. Area i-esima	tipo figura	b	B	h	area (m^2)
1	triangolo rettangolo	-	2,30	5,00	5,75
2	trapezio rettangolo	2,30	4,22	5,00	16,30
3	trapezio rettangolo	4,22	5,20	5,00	23,55
4	trapezio rettangolo	5,20	6,20	5,00	28,50
5	trapezio rettangolo	6,20	6,65	5,00	32,13
6	trapezio rettangolo	6,30	6,65	5,00	32,38
7	trapezio rettangolo	6,00	6,30	5,00	30,75
8	trapezio rettangolo	5,90	6,00	5,00	29,75
9	trapezio rettangolo	5,45	5,90	5,00	28,38
10	trapezio rettangolo	5,45	6,00	5,00	28,63
11	trapezio rettangolo	5,80	6,00	5,00	29,50
12	trapezio rettangolo	5,35	5,80	5,00	27,88
13	trapezio rettangolo	5,25	5,35	5,00	26,50
14	trapezio rettangolo	5,25	5,70	5,00	27,38
15	trapezio rettangolo	5,70	7,10	5,00	32,00
16	trapezio rettangolo	5,90	7,10	5,00	32,50
17	trapezio rettangolo	5,40	5,90	5,00	28,25
18	trapezio rettangolo	5,40	5,70	5,00	27,75
19	trapezio rettangolo	5,70	6,10	5,00	29,50
20	trapezio rettangolo	5,05	6,10	5,00	27,88
21	trapezio rettangolo	4,55	5,05	5,00	24,00
22	trapezio rettangolo	4,00	4,55	5,00	21,38
23	trapezio rettangolo	2,50	4,00	5,00	16,25
24	triangolo rettangolo	-	2,50	5,00	6,25
			AREA TOTALE		613,10

Fase finale: stima della portata



Ricordando la formula per il calcolo della portata di un fiume :

Q = (Velocità della corrente) x (Sezione alveo)

sostituendo i valori precedentemente individuati, la portata risulta essere pari a:

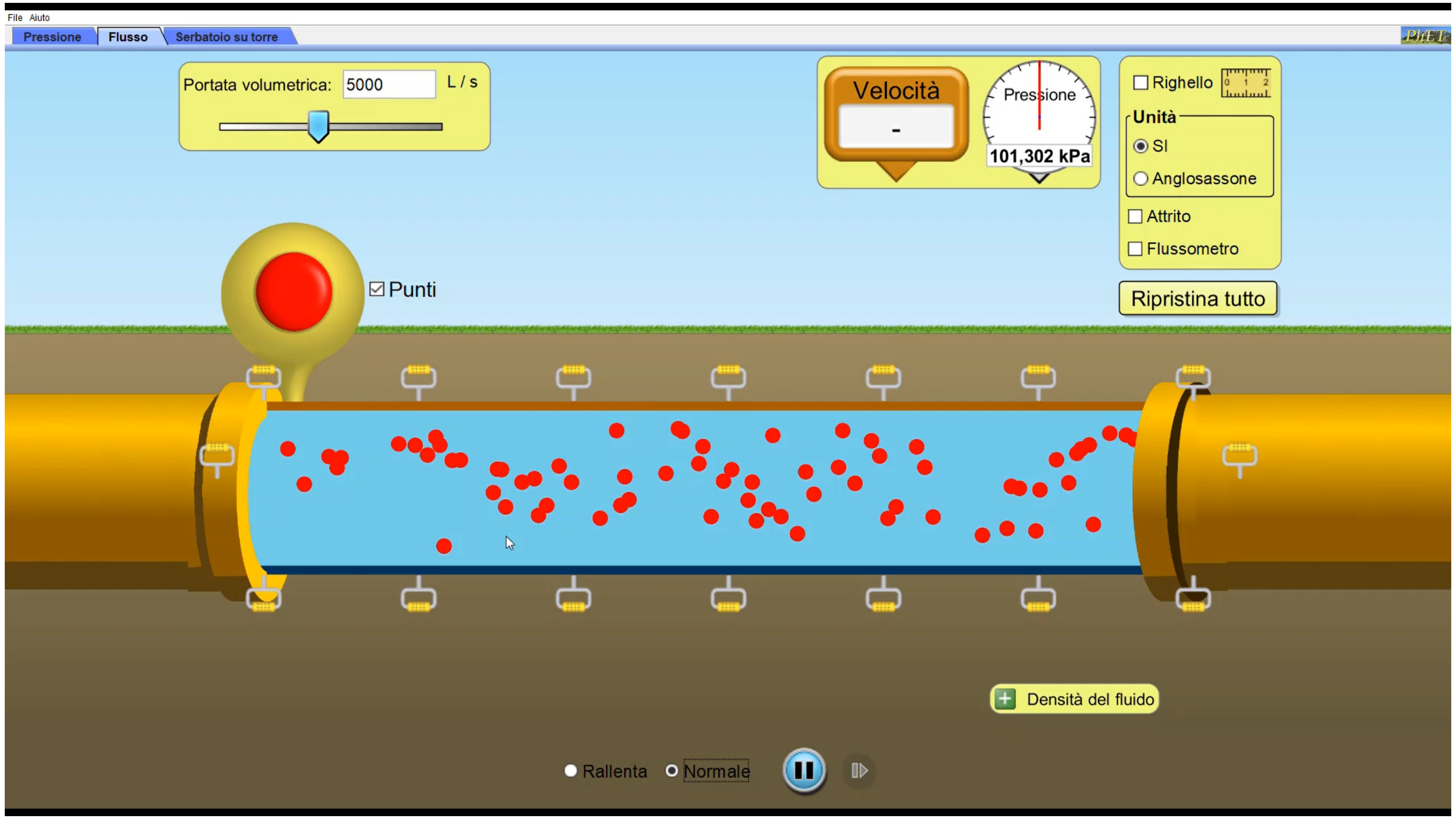
Q = Vmedia x Atotale = (0,60 m/sec) x (613,10 m2/sec) = 368 m^3/s

In conclusione, possiamo fare una rapida verifica dei nostri risultati secondo quanto riportato nei seguenti punti:

1) il fiume Po ha un "regime" fluviale che segna una "morbida" a maggio (proprio nel periodo in cui abbiamo fatto le misure). Dall'analisi della figura seguente (regime del fiume Po) possiamo assumere che, per il mese di maggio, il Po abbia una portata complessiva mediamente di 1800 mc/sec;
2) 2) il Po di Gnocca, secondo i dati bibliografici, trasporta verso la foce circa il 20% della portata complessiva del Po. Allora, se calcoliamo la percentuale di pertinenza, ossia il 20% di 1800 mc/sec, otteniamo 360 mc/sec che è un valore molto vicino a quello trovato sperimentalmente.

Laboratorio informatico

Prima parte



PhET Interactive Simulations

Visit http://phet.colorado.edu

Laboratorio di scienze della Terra

Cenni al trasporto solido dei sedimenti

Setacci e idrometri per la costruzione delle curve granulometriche

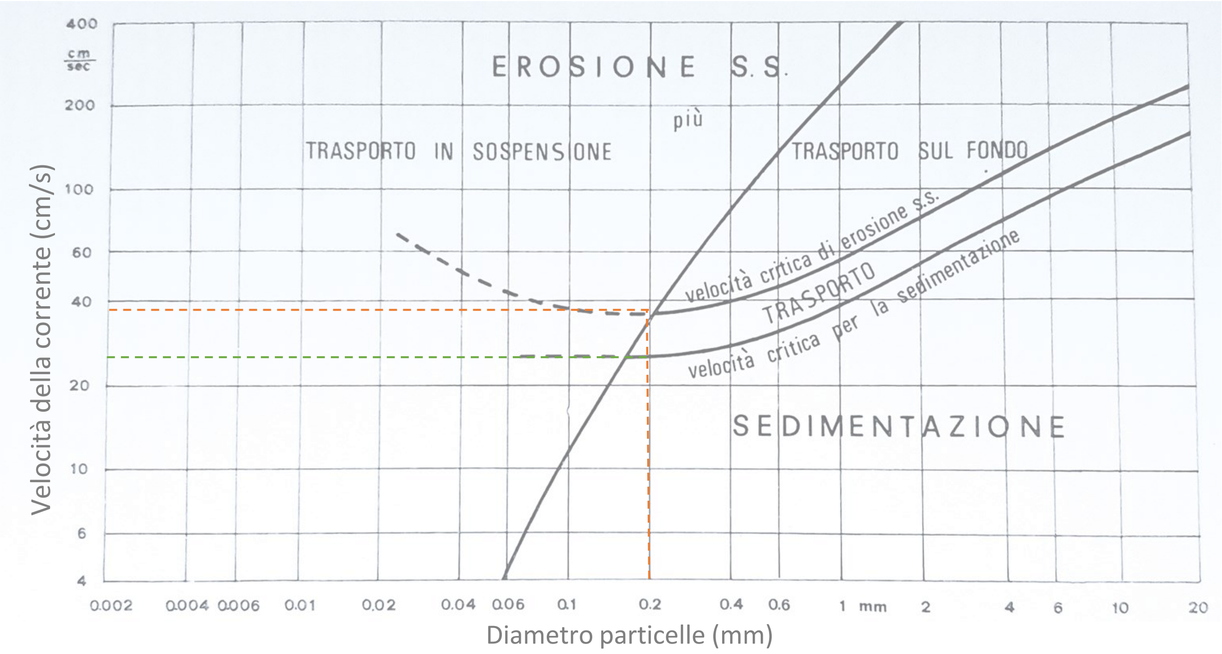
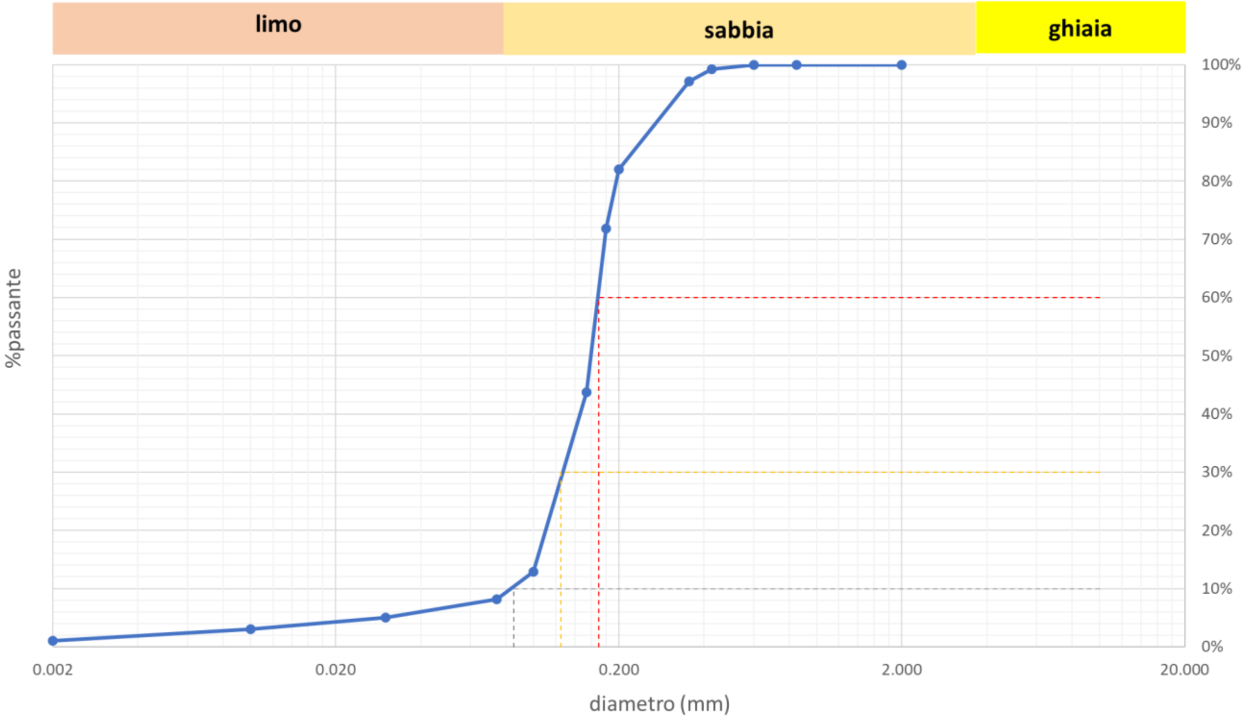


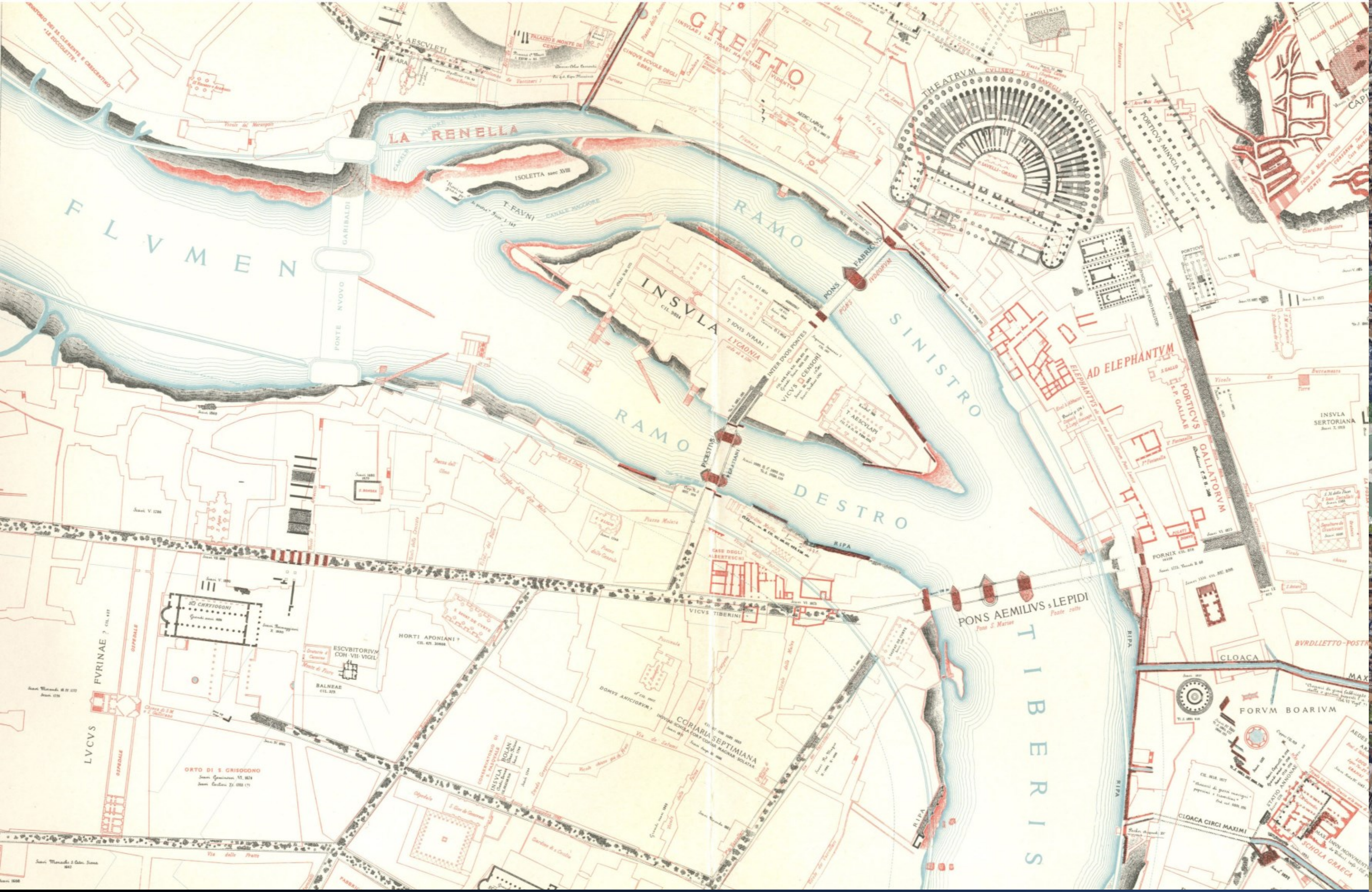
Diagramma di Sundborg



Curva granulometria di una sabbia del delta del Po (da archivio personale C. Veronese).

Ricerca di isole fluviali da immagini satellitari

Il nostro fiume Po

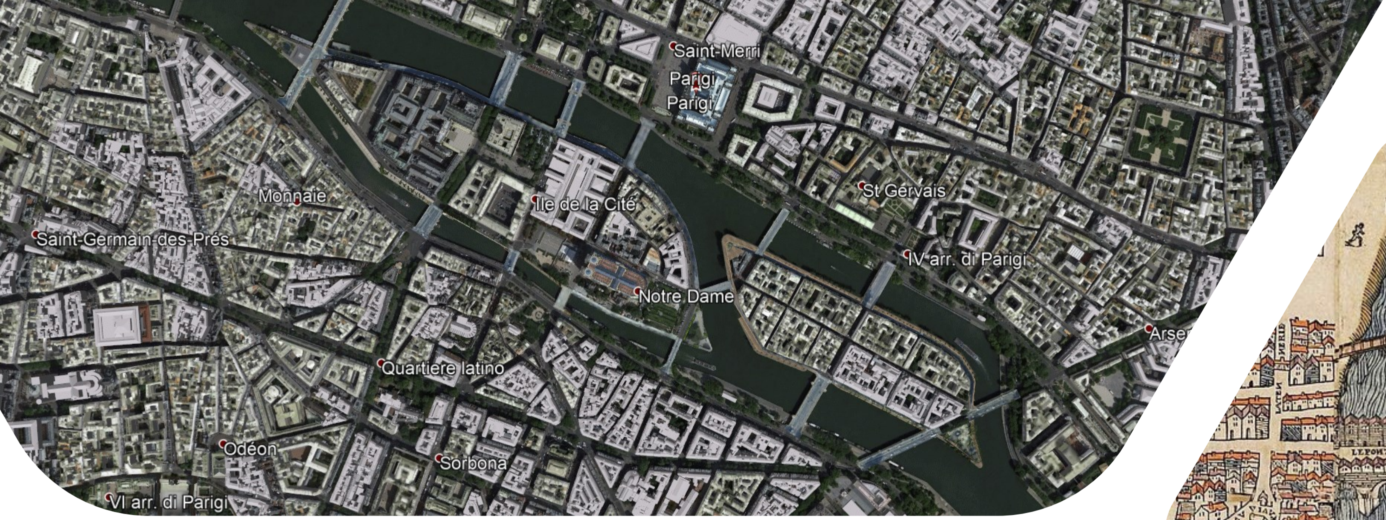


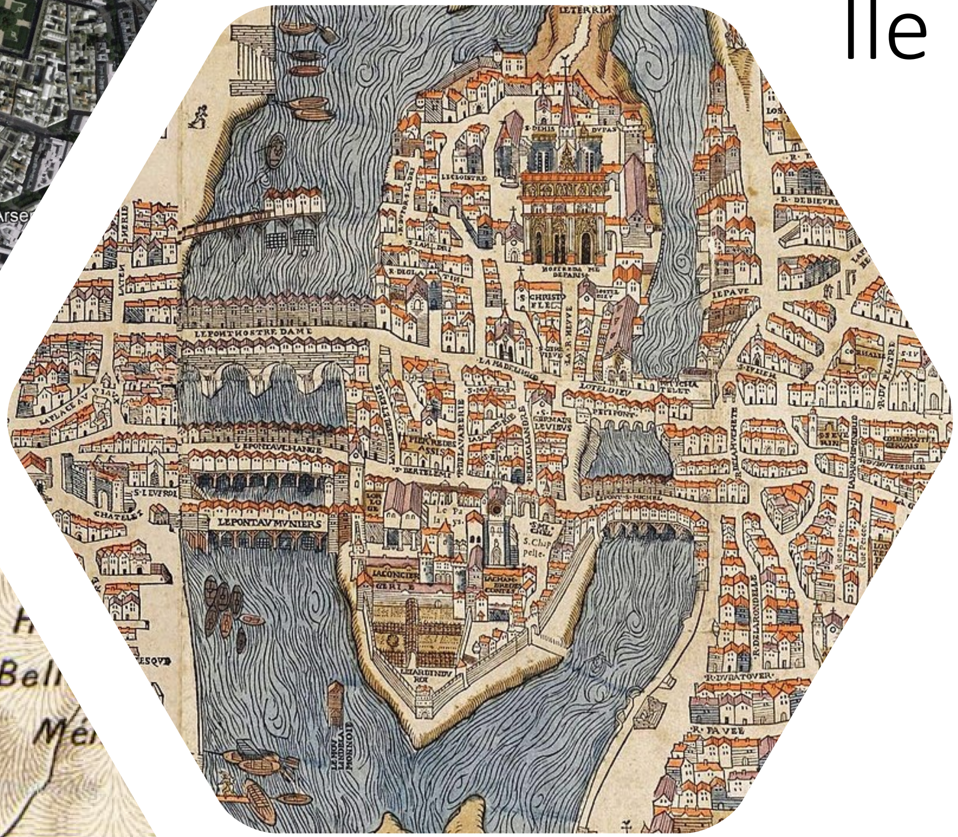
Fonte immagine: Geoportale Cartografico Città metropolitana di Roma Capitale
https://geoportale.cittametropolitanaroma.it/cartografia-storica/23/45/tavola-28-isola-tiberina-0

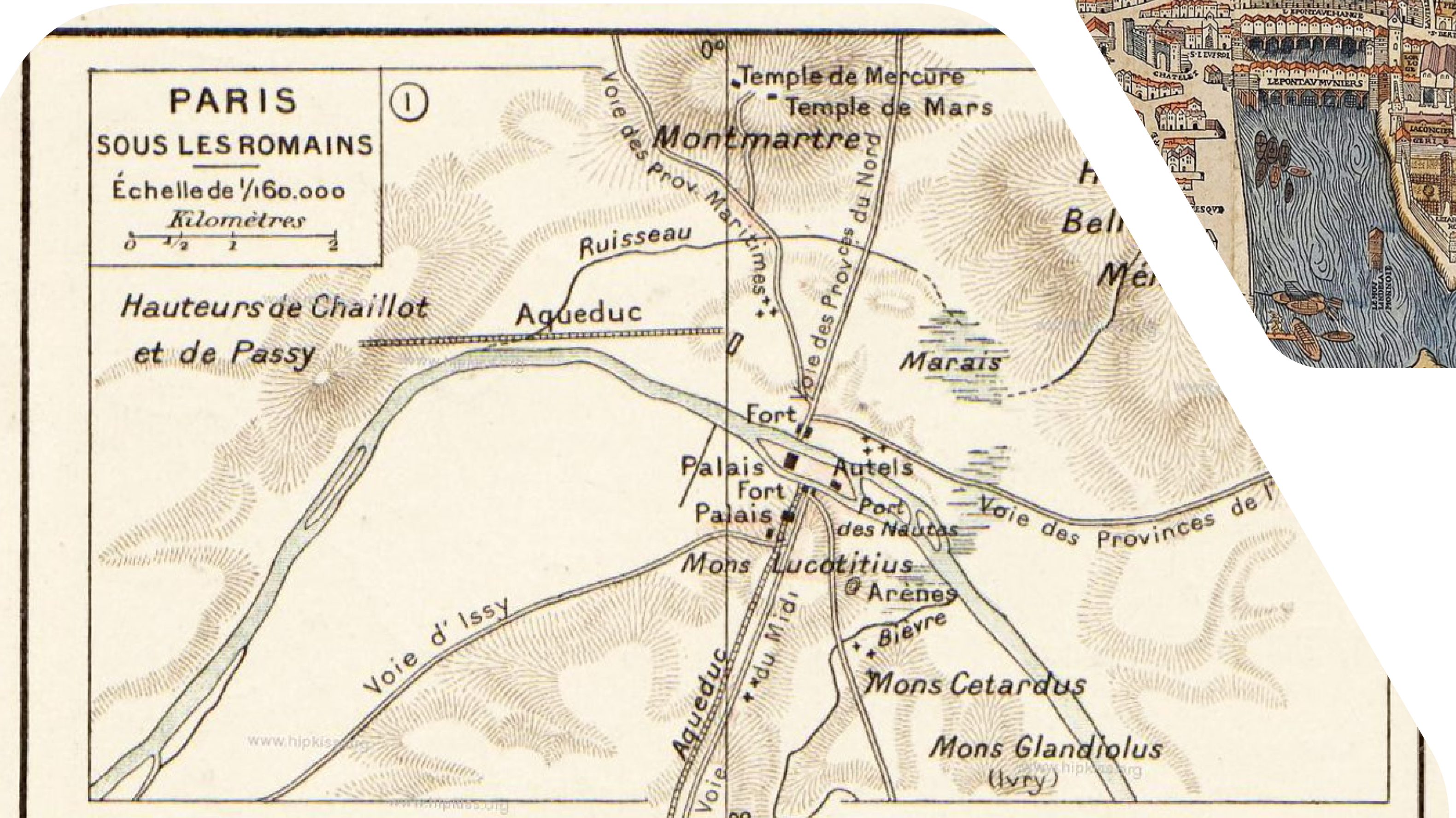
Fonte immagine: Google Earth

Roma: Isola Tiberina

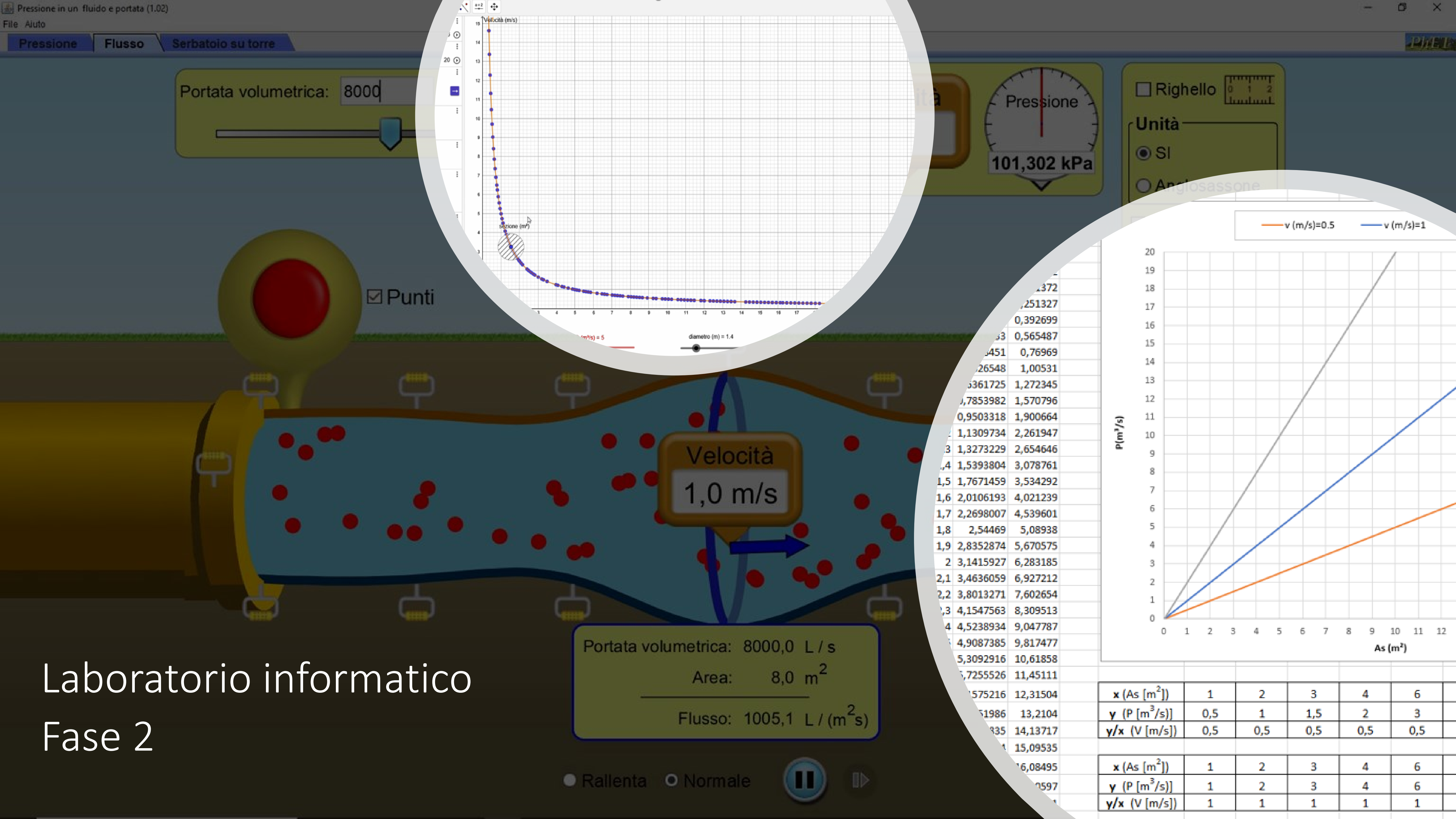
Parigi:
Île de la Cité



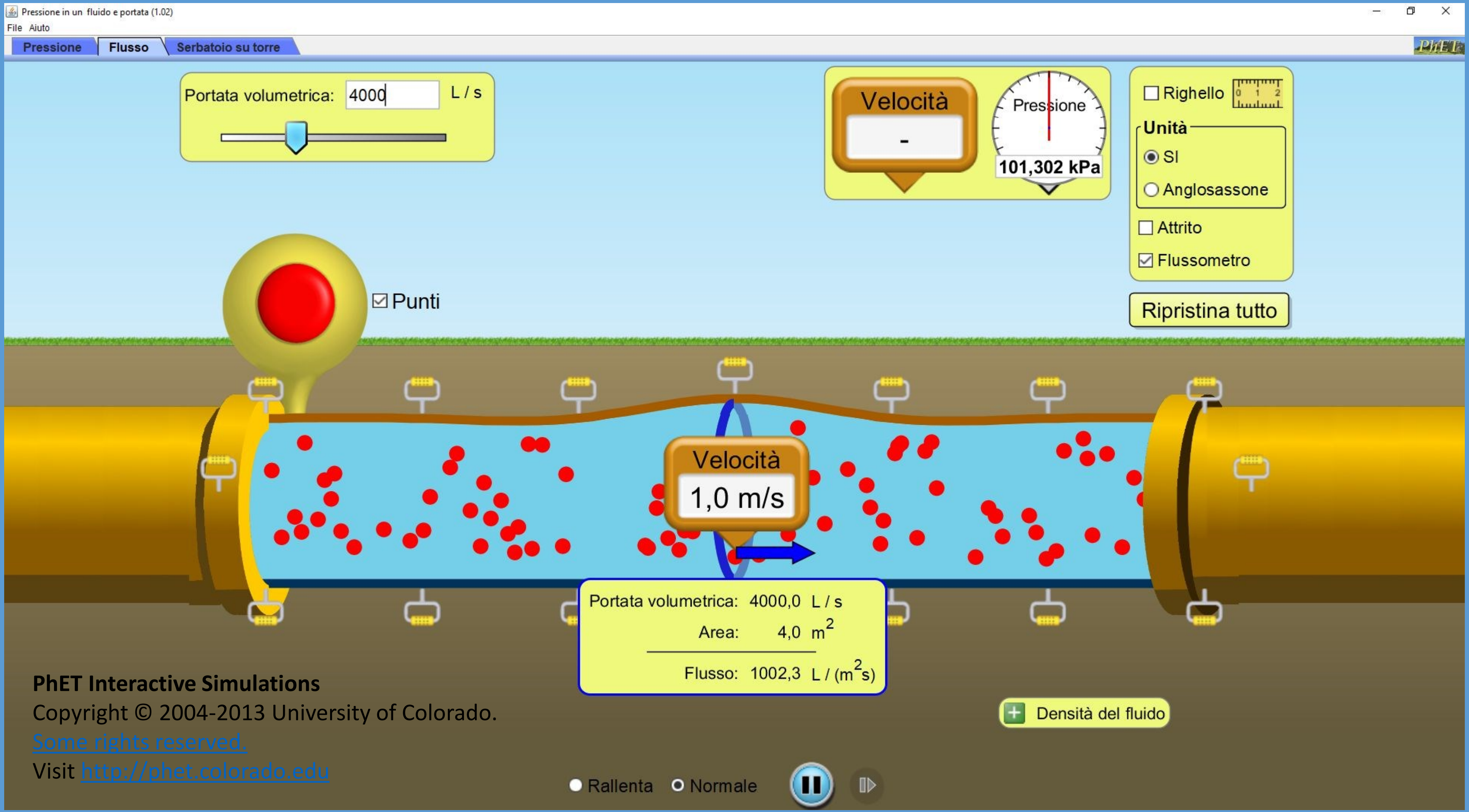




Fonti immagini: By Olivier Truschet et Germain Hoyau - File:Plan de Paris vers 1550 color.jpg, Public Domain, Paul Vidal de La Blache, Public domain, via Wikimedia Commons, Google Earth



Laboratorio informatico
Fase 2

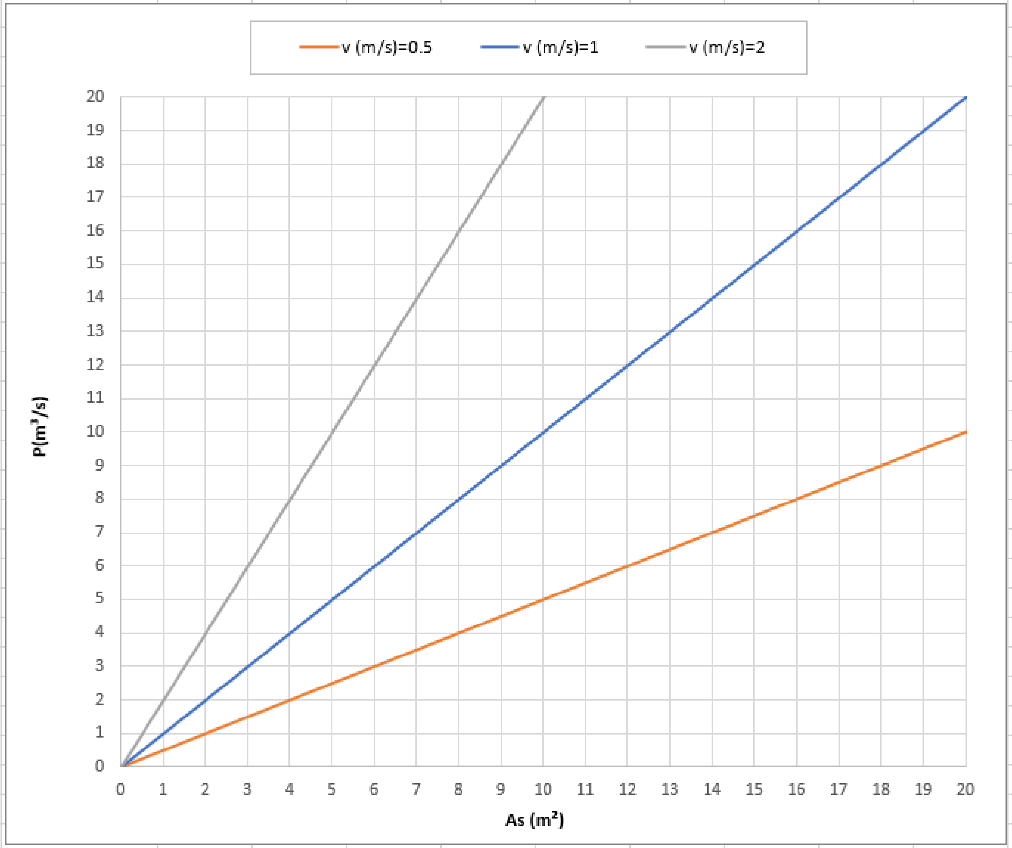


x	As [m²]	2	4	8
y	P [m³/s)]	2	4	8
y/x	v [m/s]	1	1	1

Proporzionalità diretta: portata in funzione della sezione a velocità costante

Proporzionalità diretta (con foglio di calcolo)

	A	B	C	E	F	G	I	J	K
1	v (m/s)=0.5			v (m/s)=1			v (m/s)=2		
2	0,5			1			2		
3									
4	d (m)	As (m²)	P(m³/s)	d (m)	As (m²)	P(m³/s)	d (m)	As (m²)	P(m³/s)
5	0,1	0,007854	0,003927	0,1	0,007854	0,007854	0,1	0,007854	0,015708
6	0,2	0,0314159	0,015708	0,2	0,0314159	0,031416	0,2	0,0314159	0,062832
7	0,3	0,0706858	0,035343	0,3	0,0706858	0,070686	0,3	0,0706858	0,141372
8	0,4	0,1256637	0,062832	0,4	0,1256637	0,125664	0,4	0,1256637	0,251327
9	0,5	0,1963495	0,098175	0,5	0,1963495	0,19635	0,5	0,1963495	0,392699
10	0,6	0,2827433	0,141372	0,6	0,2827433	0,282743	0,6	0,2827433	0,565487
11	0,7	0,3848451	0,192423	0,7	0,3848451	0,384845	0,7	0,3848451	0,76969
12	0,8	0,5026548	0,251327	0,8	0,5026548	0,502655	0,8	0,5026548	1,00531
13	0,9	0,6361725	0,318086	0,9	0,6361725	0,636173	0,9	0,6361725	1,272345
14	1	0,7853982	0,392699	1	0,7853982	0,785398	1	0,7853982	1,570796
15	1,1	0,9503318	0,475166	1,1	0,9503318	0,950332	1,1	0,9503318	1,900664
16	1,2	1,1309734	0,565487	1,2	1,1309734	1,130973	1,2	1,1309734	2,261947
17	1,3	1,3273229	0,663661	1,3	1,3273229	1,327323	1,3	1,3273229	2,654646
18	1,4	1,5393804	0,76969	1,4	1,5393804	1,53938	1,4	1,5393804	3,078761
19	1,5	1,7671459	0,883573	1,5	1,7671459	1,767146	1,5	1,7671459	3,534292
20	1,6	2,0106193	1,00531	1,6	2,0106193	2,010619	1,6	2,0106193	4,021239
21	1,7	2,2698007	1,1349	1,7	2,2698007	2,269801	1,7	2,2698007	4,539601
22	1,8	2,54469	1,272345	1,8	2,54469	2,54469	1,8	2,54469	5,08938
23	1,9	2,8352874	1,417644	1,9	2,8352874	2,835287	1,9	2,8352874	5,670575
24	2	3,1415927	1,570796	2	3,1415927	3,141593	2	3,1415927	6,283185
25	2,1	3,4636059	1,731803	2,1	3,4636059	3,463606	2,1	3,4636059	6,927212
26	2,2	3,8013271	1,900664	2,2	3,8013271	3,801327	2,2	3,8013271	7,602654
27	2,3	4,1547563	2,077378	2,3	4,1547563	4,154756	2,3	4,1547563	8,309513
28	2,4	4,5238934	2,261947	2,4	4,5238934	4,523893	2,4	4,5238934	9,047787
29	2,5	4,9087385	2,454369	2,5	4,9087385	4,908739	2,5	4,9087385	9,817477
30	2,6	5,3092916	2,654646	2,6	5,3092916	5,309292	2,6	5,3092916	10,61858
31	2,7	5,7255526	2,862776	2,7	5,7255526	5,725553	2,7	5,7255526	11,45111
32	2,8	6,1575216	3,078761	2,8	6,1575216	6,157522	2,8	6,1575216	12,31504
33	2,9	6,6051986	3,302599	2,9	6,6051986	6,605199	2,9	6,6051986	13,2104
34	3	7,0685835	3,534292	3	7,0685835	7,068583	3	7,0685835	14,13717
35	3,1	7,5476764	3,773838	3,1	7,5476764	7,547676	3,1	7,5476764	15,09535
36	3,2	8,0424772	4,021239	3,2	8,0424772	8,042477	3,2	8,0424772	16,08495
37	3,3	8,552986	4,276493	3,3	8,552986	8,552986	3,3	8,552986	17,10597
38	3,4	9,0792028	4,539601	3,4	9,0792028	9,079203	3,4	9,0792028	18,15841
39	3,5	9,6211275	4,810564	3,5	9,6211275	9,621128	3,5	9,6211275	19,24226
40	3,6	10,17876	5,08938	3,6	10,17876	10,17876	3,6	10,17876	20,35752
41	3,7	10,752101	5,37605	3,7	10,752101	10,7521	3,7	10,752101	21,5042
42	3,8	11,341149	5,670575	3,8	11,341149	11,34115	3,8	11,341149	22,6823

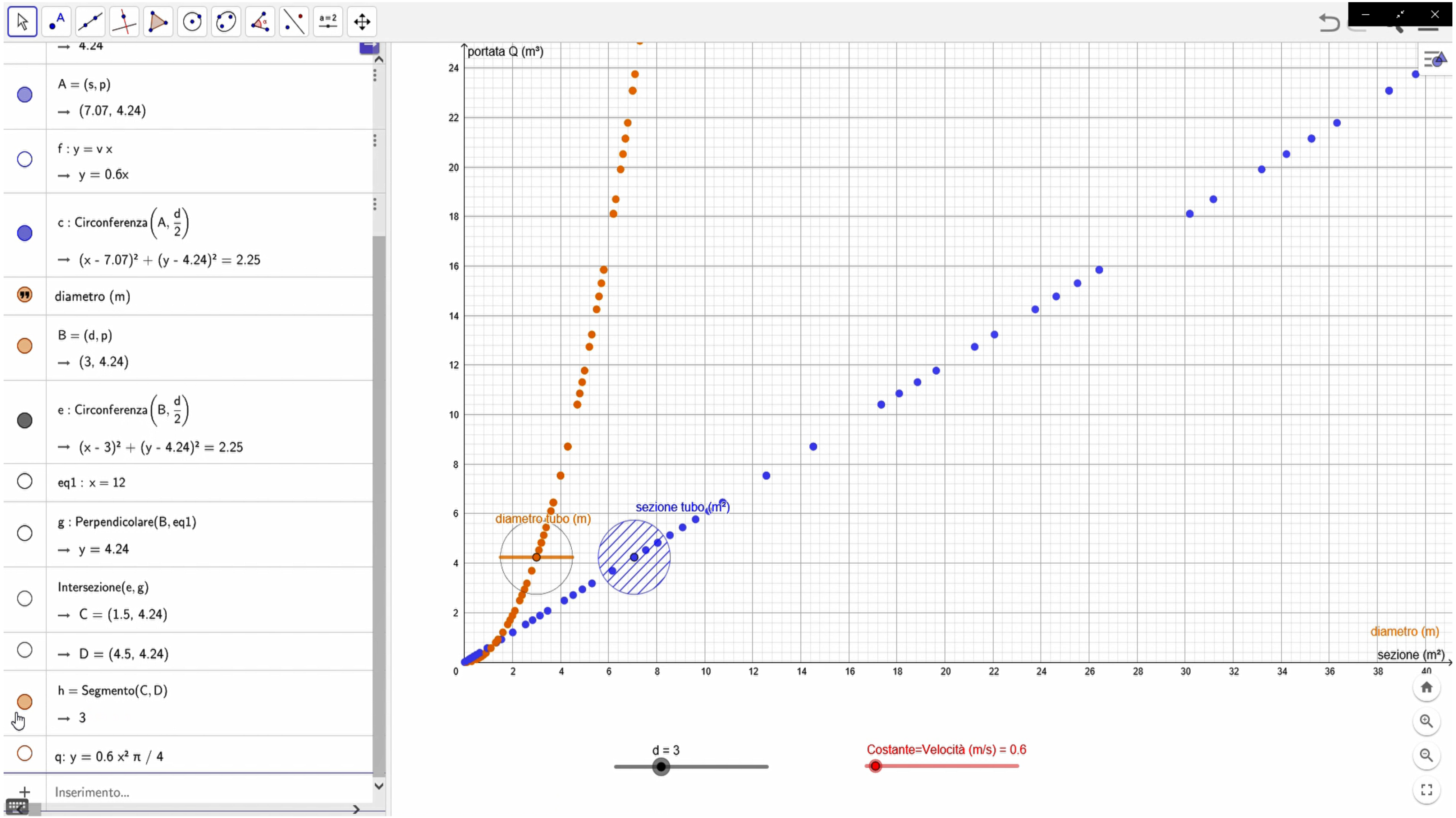


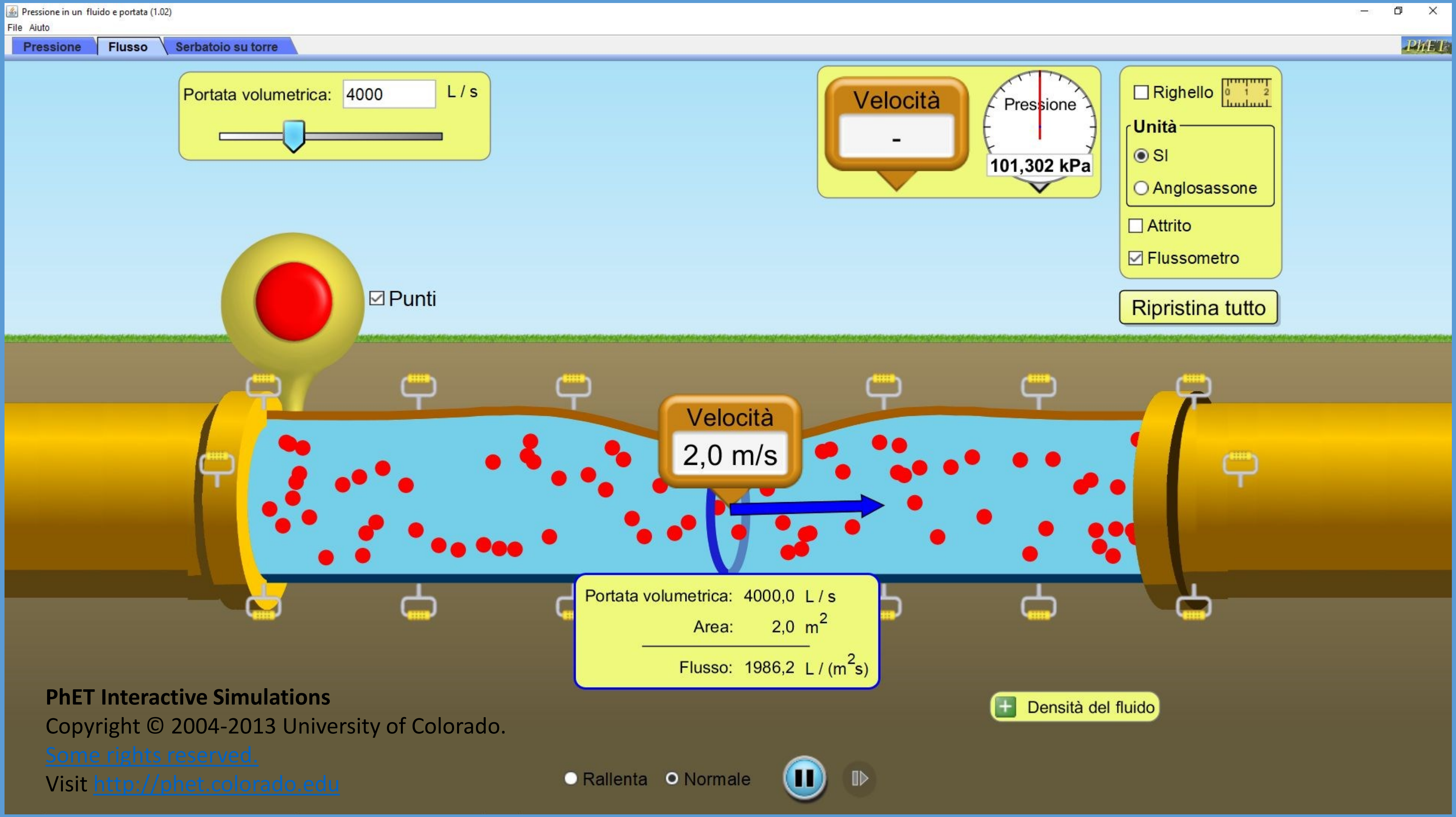
x (As [m²])	1	2	3	4	6	8	10	15	20
y (P [m³/s)]	0,5	1	1,5	2	3	4	5	7,5	10
y/x (V [m/s])	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

x (As [m²])	1	2	3	4	6	8	10	15	20
y (P [m³/s)]	1	2	3	4	6	8	10	15	20
y/x (V [m/s])	1	1	1	1	1	1	1	1	1

x (As [m²])	1	2	3	4	6	8	10	15	20
y (P [m³/s)]	2	4	6	8	12	16	20	30	40
y/x (V [m/s])	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Proporzionalità diretta e quadratica (con GeoGebra)



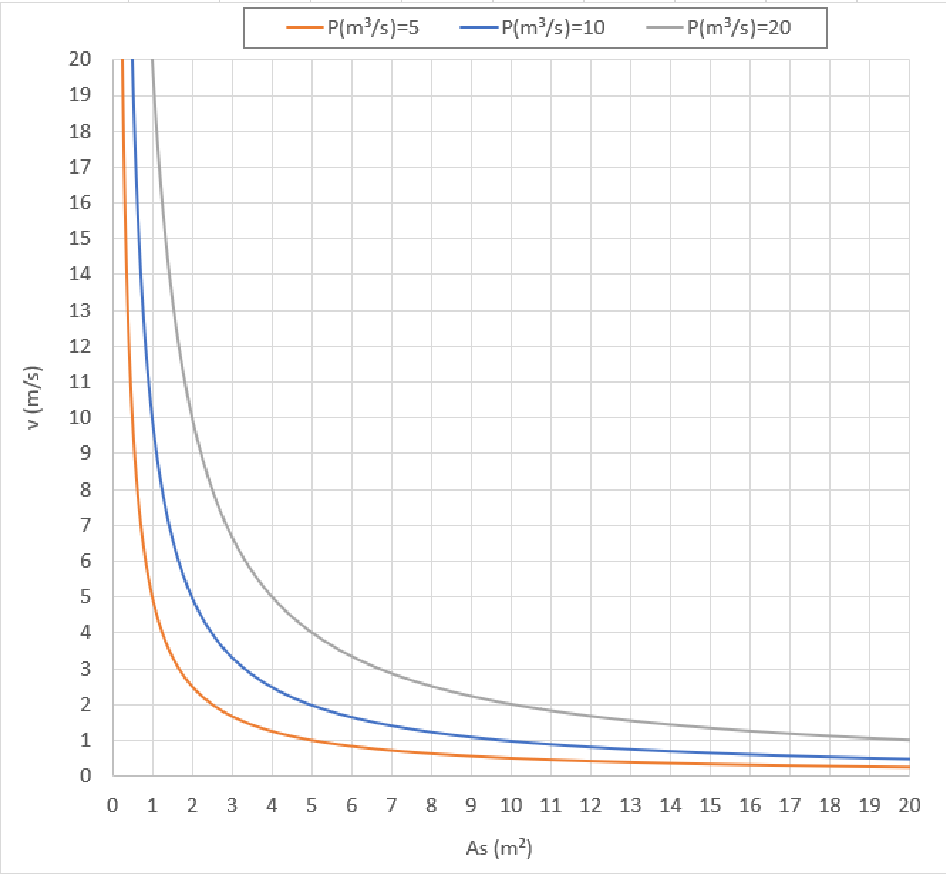


x	As [m²]	8	4	2
y	v [m/s]	0,5	1	2
y·x	P [m³/s)]	4	4	4

Proporzionalità inversa: velocità in funzione della sezione a portata costante

Proporzionalità inversa (con foglio di calcolo)

$P(m^3/s)=5$			$P(m^3/s)=10$			$P(m^3/s)=20$		
5			10			20		
d (m)	v (m/s)	As (m²)	d (m)	v (m/s)	As (m²)	d (m)	v (m/s)	As (m²)
0,1	636,62	0,007854	0,1	1273,24	0,007854	0,1	2546,48	0,007854
0,2	159,15	0,031416	0,2	318,31	0,031416	0,2	636,62	0,031416
0,3	70,74	0,070686	0,3	141,47	0,070686	0,3	282,94	0,070686
0,4	39,79	0,125664	0,4	79,58	0,125664	0,4	159,15	0,125664
0,5	25,46	0,19635	0,5	50,93	0,19635	0,5	101,86	0,19635
0,6	17,68	0,282743	0,6	35,37	0,282743	0,6	70,74	0,282743
0,7	12,99	0,384845	0,7	25,98	0,384845	0,7	51,97	0,384845
0,8	9,95	0,502655	0,8	19,89	0,502655	0,8	39,79	0,502655
0,9	7,86	0,636173	0,9	15,72	0,636173	0,9	31,44	0,636173
1	6,37	0,785398	1	12,73	0,785398	1	25,46	0,785398
1,1	5,26	0,950332	1,1	10,52	0,950332	1,1	21,05	0,950332
1,2	4,42	1,130973	1,2	8,84	1,130973	1,2	17,68	1,130973
1,3	3,77	1,327323	1,3	7,53	1,327323	1,3	15,07	1,327323
1,4	3,25	1,53938	1,4	6,50	1,53938	1,4	12,99	1,53938
1,5	2,83	1,767146	1,5	5,66	1,767146	1,5	11,32	1,767146
1,6	2,49	2,010619	1,6	4,97	2,010619	1,6	9,95	2,010619
1,7	2,20	2,269801	1,7	4,41	2,269801	1,7	8,81	2,269801
1,8	1,96	2,54469	1,8	3,93	2,54469	1,8	7,86	2,54469
1,9	1,76	2,835287	1,9	3,53	2,835287	1,9	7,05	2,835287
2	1,59	3,141593	2	3,18	3,141593	2	6,37	3,141593
2,1	1,44	3,463606	2,1	2,89	3,463606	2,1	5,77	3,463606
2,2	1,32	3,801327	2,2	2,63	3,801327	2,2	5,26	3,801327
2,3	1,20	4,154756	2,3	2,41	4,154756	2,3	4,81	4,154756
2,4	1,11	4,523893	2,4	2,21	4,523893	2,4	4,42	4,523893
2,5	1,02	4,908739	2,5	2,04	4,908739	2,5	4,07	4,908739
2,6	0,94	5,309292	2,6	1,88	5,309292	2,6	3,77	5,309292
2,7	0,87	5,725553	2,7	1,75	5,725553	2,7	3,49	5,725553
2,8	0,81	6,157522	2,8	1,62	6,157522	2,8	3,25	6,157522
2,9	0,76	6,605199	2,9	1,51	6,605199	2,9	3,03	6,605199
3	0,71	7,068583	3	1,41	7,068583	3	2,83	7,068583
3,1	0,66	7,547676	3,1	1,32	7,547676	3,1	2,65	7,547676
3,2	0,62	8,042477	3,2	1,24	8,042477	3,2	2,49	8,042477
3,3	0,58	8,552986	3,3	1,17	8,552986	3,3	2,34	8,552986
3,4	0,55	9,079203	3,4	1,10	9,079203	3,4	2,20	9,079203
3,5	0,52	9,621128	3,5	1,04	9,621128	3,5	2,08	9,621128
3,6	0,49	10,17876	3,6	0,98	10,17876	3,6	1,96	10,17876
3,7	0,47	10,7521	3,7	0,93	10,7521	3,7	1,86	10,7521
3,8	0,44	11,34115	3,8	0,88	11,34115	3,8	1,76	11,34115
3,9	0,42	11,94591	3,9	0,84	11,94591	3,9	1,67	11,94591

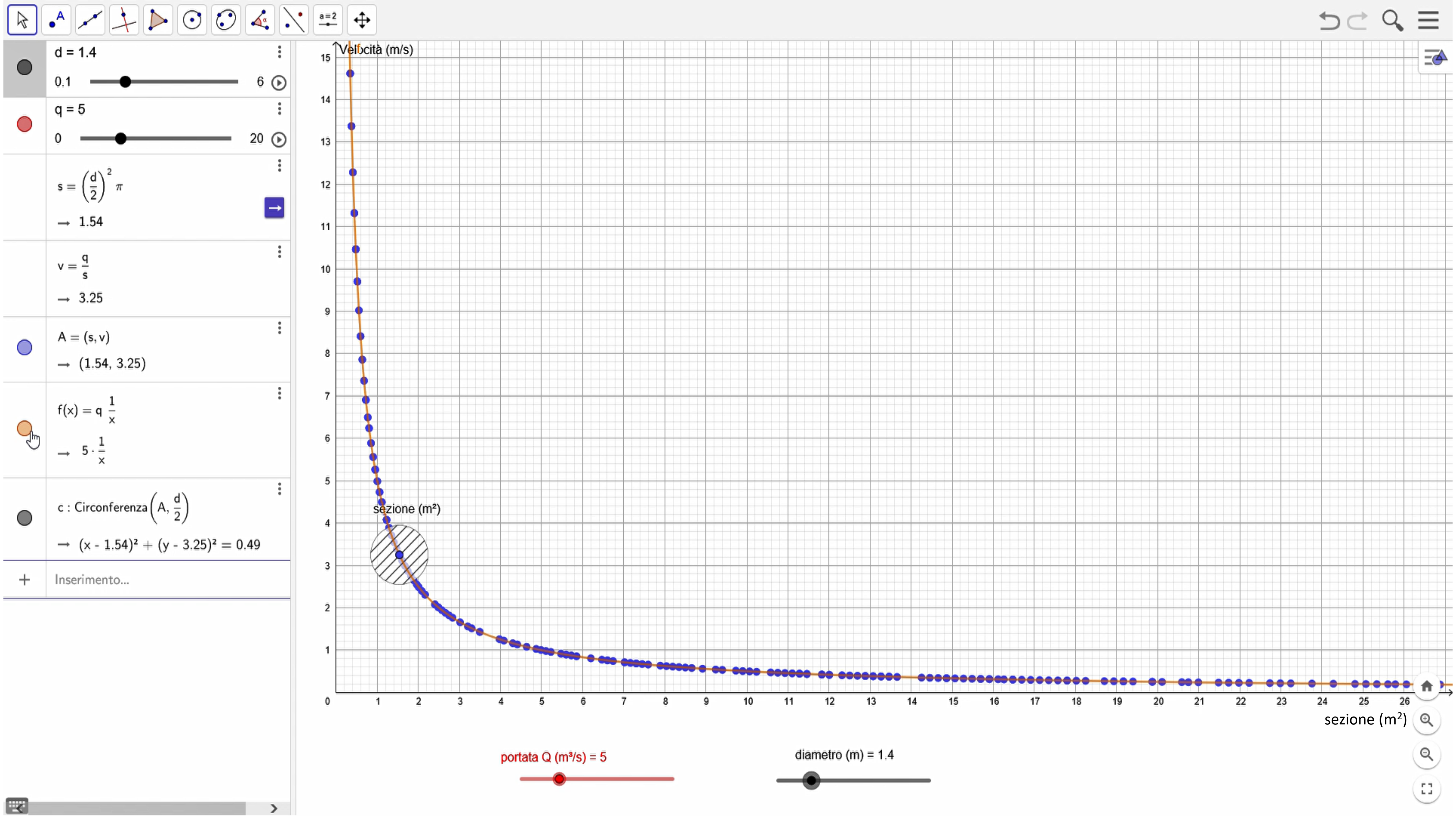


x (As [m²])	0,25	0,5	1	2	4	5	10	15	20
y (V [m/s])	20	10	5	2,5	1,25	1	0,5	0,33333	0,25
y·x (P [m³/s])	5	5	5	5	5	5	5	5	5

x (As [m²])	0,25	0,5	1	2	4	5	10	15	20
y (V [m/s])	40	20	10	5	2,5	2	1	0,66667	0,5
y·x (P [m³/s])	10	10	10	10	10	10	10	10	10

x (As [m²])	0,25	0,5	1	2	4	5	10	15	20
y (V [m/s])	80	40	20	10	5	4	2	1,33333	1
y·x (P [m³/s])	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Proporzionalità inversa (con GeoGebra)



Approfondimenti e attività integrative

Classi di grandezze

Gli allievi hanno già acquisito dallo studio dei segmenti alcuni importanti concetti inerenti

- la possibilità di confrontare tra loro due segmenti qualsiasi e quindi stabilire se sono uguali o, se non lo sono, quale dei due è il maggiore
- la possibilità di introdurre una operazione di addizione, che gode delle proprietà associativa e commutativa.

Si possono in verità introdurre concetti analoghi anche per altri insiemi, quali gli angoli, gli archi di una stessa circonferenza, le superfici piane considerate come estensione.

Questi importanti esempi giustificano l'introduzione di un nuovo ente:

Si dice classe di grandezze ogni insieme tale che due suoi qualunque elementi possono essere "confrontati" e "sommati".

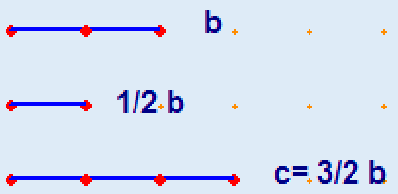
Due grandezze della stessa classe si dicono omogenee.

Si possono estendere i concetti di multiplo e di sottomultiplo già visti per i segmenti, a tutte le altre grandezze.

Per cui una grandezza A si dice multipla della grandezza B secondo il numero (naturale e non nullo) *m* se A coincide con B+B+….+B (*m* addendi) e scriveremo A= *m* B ovvero diremo che B è sottomultiplo di A e scriveremo B= (1/*m*) A.

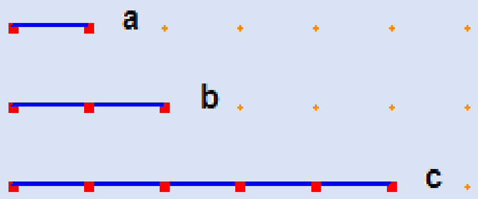
Se la grandezza A è uguale alla somma di m grandezze eguali a (1/n) B scriveremo A = (m/n) B.

Ad esempio il segmento ***c***, somma di 3 segmenti uguali ciascuno alla metà del segmento ***b***, si indica con la scrittura ***c***=(3/2) ***b.***



Le grandezze commensurabili ed il loro rapporto

Dall'esempio proposto



(1)

risulta che ***a*** è sottomultiplo comune di ***b*** e di ***c***: diremo in tal caso che ***b*** e ***c*** sono commensurabili.
Questa situazione suggerisce la

Definizione. Due grandezze omogenee si dicono commensurabili quando ammettono una grandezza sottomultipla comune, cioè esiste una terza grandezza omogenea con le prime due che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse.

Date due grandezze commensurabili A e B con $(1/m)\ A = (1/n)B$ scriviamo anche $A=(m/n)B$: il numero m/n viene chiamato **rapporto** fra A e B e si scrive anche $A/B=m/n$ o $A:B=m/n$.

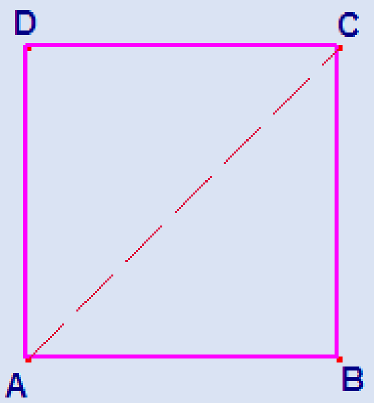
Ne viene che il rapporto fra grandezze commensurabili è un numero razionale. Pertanto il rapporto di due grandezze commensurabili è un numero razionale.

Per esempio nel caso dei segmenti (1)
$\boldsymbol{b}=(2/5)\ \boldsymbol{c}$ ovvero $\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c} = 2/5$

Le grandezze incommensurabili ed il loro rapporto

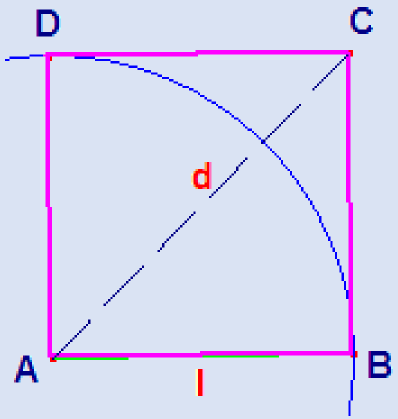
Due grandezze omogenee si dicono incommensurabili quando non ammettono una grandezza sottomultipla comune.

Un esempio di grandezze incommensurabili è dato dal lato e dalla diagonale di un quadrato.



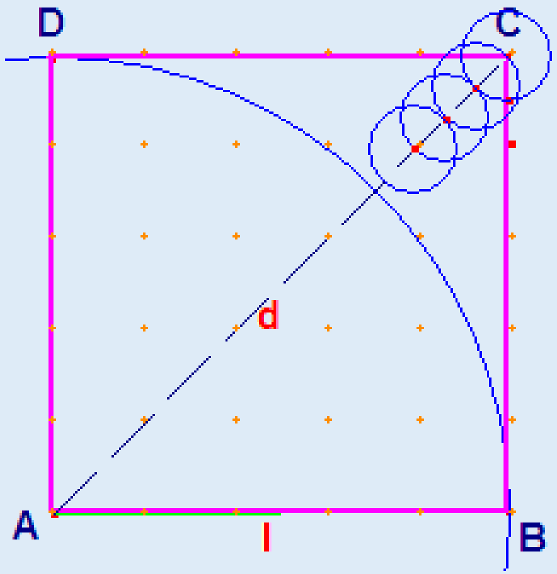
Siano AC e AB rispettivamente la diagonale e il lato di un quadrato. Vogliamo dimostrare che sono incommensurabili.
Ragioniamo per assurdo e supponiamo che che AC e AB siano segmenti commensurabili, ossia che ammettano una grandezza sottomultipla comune U, contenuta m volte in AC e n volte in AB. Ne consegue che n AC =m AB. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC , si perviene a $n^2 = 2\ m^2$. Si è giunti ad un assurdo perché n^2 contiene 2 elevato ad esponente pari, mentre il secondo membro contiene 2 elevato ad esponente dispari. Tale assurdo consegue dall'aver supposto AC *e* AB commensurabili. Ne consegue che la diagonale e il lato del quadrato sono segmenti incommensurabili.

Si può notare che la definizione di rapporto introdotta per le grandezze commensurabili non ha significato per le grandezze incommensurabili. Introduciamo una nuova definizione di rapporto che valga sia per le grandezze commensurabili sia per le grandezze incommensurabili.



Riprendiamo il caso precedente e confrontiamo diagonale e lato del quadrato:
si scopre che ***l***<***d***<***2l***, cioè riportando ***l*** su ***d*** si nota che ***l*** è contenuto una sola volta con il resto di ***r***.

continua



Ripetendo il procedimento non arriveremo mai ad un resto nullo: infatti se lo trovassimo, il rapporto sarebbe traducibile mediante un numero decimale finito e quindi la diagonale e il lato sarebbero grandezze commensurabili. Nè può verificarsi che da un certo punto in poi le cifre si possano ripetere, perché in tal caso il rapporto sarebbe un numero decimale periodico, quindi ancora razionale.

In conclusione col procedimento indicato si viene a costruire un allineamento decimale, illimitato, non periodico.

Poiché l'unione dei numeri razionali positivi e dei numeri irrazionali positivi costituisce l'insieme dei numeri reali positivi, possiamo affermare che

Il rapporto di due grandezze omogenee è un numero reale (positivo); esso è un numero razionale nel caso di grandezze commensurabili, irrazionale nel caso di grandezze incommensurabili.

Misure di grandezze

Conviene talvolta determinare il rapporto di grandezze di una stessa classe rispetto ad una grandezza prefissata; in tal caso il rapporto prende il nome di **misura** rispetto alla grandezza assunta come unitaria.

E' opportuno distinguere sempre una grandezza dalla sua misura: ad esempio per il segmento AB si denota la misura rispetto ad una prefissata unità e si scrive $\overline{AB}$ con un sovrassegno .

Si dimostrano le seguenti proprietà:

1. La misura della grandezza somma A+B* di A e di B *è uguale alla somma α + β con α e β misure di A e B

2.Se A ≤ B allora α ≤ β e se A ≈ B allora α = β e viceversa (con α e β misure di A e B)

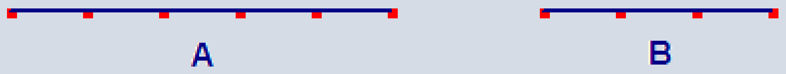
3. Il rapporto di due grandezze omogenee è uguale al rapporto delle rispettive misure

4. Data una grandezza U ed un numero positivo α esiste una ed una sola grandezza A, omogenea con U, tale che il rapporto di a rispetto ad U sia uguale ad α

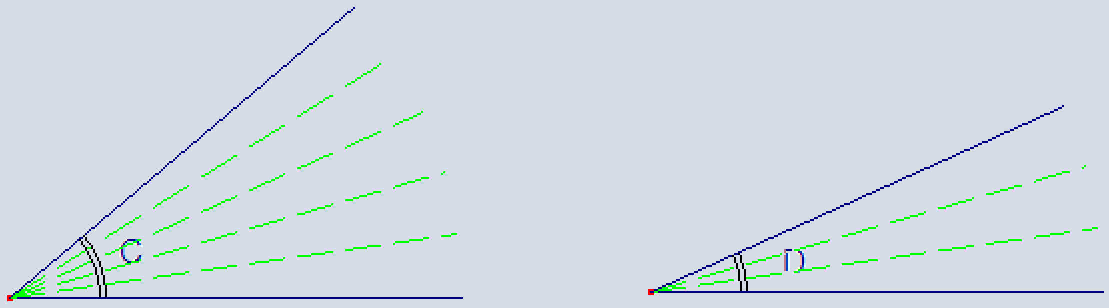
Le proporzioni tra grandezze

Esaminiamo il seguente esempio:

il rapporto tra i segmenti ***A*** e ***B*** vale 5/3;



il rapporto tra gli angoli ***C*** e ***D*** vale 5/3



L'uguaglianza tra i rapporti si traduce in un nuovo concetto, quello di **proporzione** e si scrive

$$A:B=C:D$$

In generale

Quattro grandezze ordinate A,B,C,D, le prime due omogenee tra loro e le ultime due omogenee fra loro formano una proporzione se il rapporto fra A e B è uguale al rapporto fra C e D.

Le grandezze A,B,C,D sono i termini della proporzione:

A e C sono chiamati antecedenti; A e D sono gli estremi, B e C sono i medi; D viene chiamato quarto proporzionale.

Teorema fondamentale sulle proporzioni fra grandezze.

Quattro grandezze, a due a due omogenee, formano una proporzione se e solo se sono in proporzione le rispettive misure.

Questo teorema permette di estendere alle proporzioni tra grandezze, le proprietà delle proporzioni numeriche.

Ricordiamo il

Teorema fondamentale sulle proporzioni numeriche

Quattro numeri reali positivi ordinati sono in proporzione se e soltanto se il prodotto dei medi è uguale al prodotto tra gli estremi

Proprietà

Supponiamo siano A,B,C, e D quattro grandezze in proporzione cioè A:B=C:D

Ne consegue che:

Se A > B allora C > B e viceversa; se A < B allora C < D e viceversa;

B:A=D:C (proprietà dell'invertire)

(A+B):B=(C+D):D (proprietà del comporre)

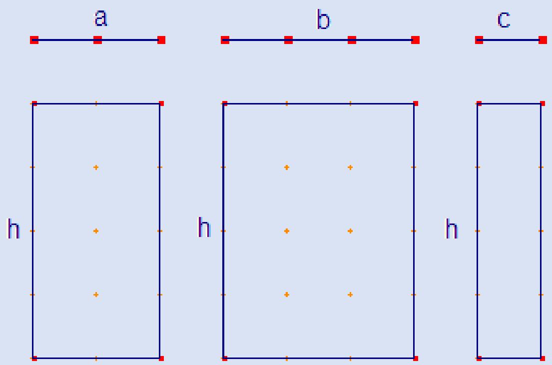
Qualora gli antecedenti siano maggiori dei conseguenti (A- B):B = (C-D):D (proprietà dello scomporre)

Qualora tutte le grandezze siano fra loro omogenee A:C = B:D (proprietà del permutare i medi)

Qualora tutte le grandezze siano fra loro omogenee D:B = C:A (proprietà del permutare gli estremi)

Classi di grandezze direttamente proporzionali

Premesso che la teoria della proporzionalità tra classi di grandezze richiede il concetto di corrispondenza tra gli elementi delle classi considerate e che gli esempi e le applicazioni più significative ai fini didattici richiedono il caso di corrispondenza biunivoca, ci limitiamo a considerare solo il caso di proporzionalità tra classi in corrispondenza biunivoca.
Consideriamo il seguente esempio:
è data una classe A di segmenti a,b,c… costruiamo la classe A' di rettangoli di stessa altezza h e di base rispettivamente a,b,c…
Tra le classi si stabilisce la corrispondenza che ad ogni segmento della classe A associa il rettangolo con base il segmento fissato e altezza h. Tale corrispondenza risulta biunivoca.



Dalla figura risulta che il rapporto tra a e b è uguale al rapporto tra i corrispondenti rettangoli; più in generale risulta che il rapporto tra segmenti della prima classe è uguale al rapporto tra i corrispondenti rettangoli.
Questo esempio suggerisce la seguente
Definizione. *Le grandezze di due classi in corrispondenza biunivoca si dicono direttamente proporzionali quando il rapporto di due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto delle due grandezze corrispondenti della seconda classe.*
Vale inoltre il seguente
Criterio di Proporzionalità. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due classi complete di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che a grandezze uguali di una classe corrispondano grandezze uguali dell'altra e che alla somma di due grandezze qualunque di una classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti dell'altra.*
L'esempio considerato si traduce nel seguente risultato:
rettangoli di uguale base (uguale altezza) sono proporzionali alle rispettive altezze (alle rispettive basi)
o passando dalle grandezze alle misure:
le aree di rettangoli di uguale base(di uguale altezza) stanno tra loro come le lunghezze delle rispettive altezze (delle rispettive basi).

Ne viene che
Date due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca, siano x e y le misure di due elementi corrispondenti con y/x =costante= h cioè $y=hx$ allora le due classi sono direttamente proporzionali .
Infatti da $y'=hx'$ e $y=hx$ discende:
a) qualora $x=x'$ allora risulta $y=y'$
b) inoltre ad $x+x'$ rimane associato $h(x+x')$, e quindi per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione $hx+hx'$,cioè $y+y'$.
Per il criterio generale di proporzionalità le due classi sono direttamente proporzionali.

continua

Viceversa vale il

Teorema della costante di proporzionalità.

Se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali allora il quoziente tra le misure di due grandezze corrispondenti è una costante (indipendente dalla scelta della coppia di grandezze corrispondenti).

Dimostrazione

Siano x_0 e y_0 le misure di due prefissate grandezze corrispondenti e x e y le misure di due qualsiasi grandezze corrispondenti.

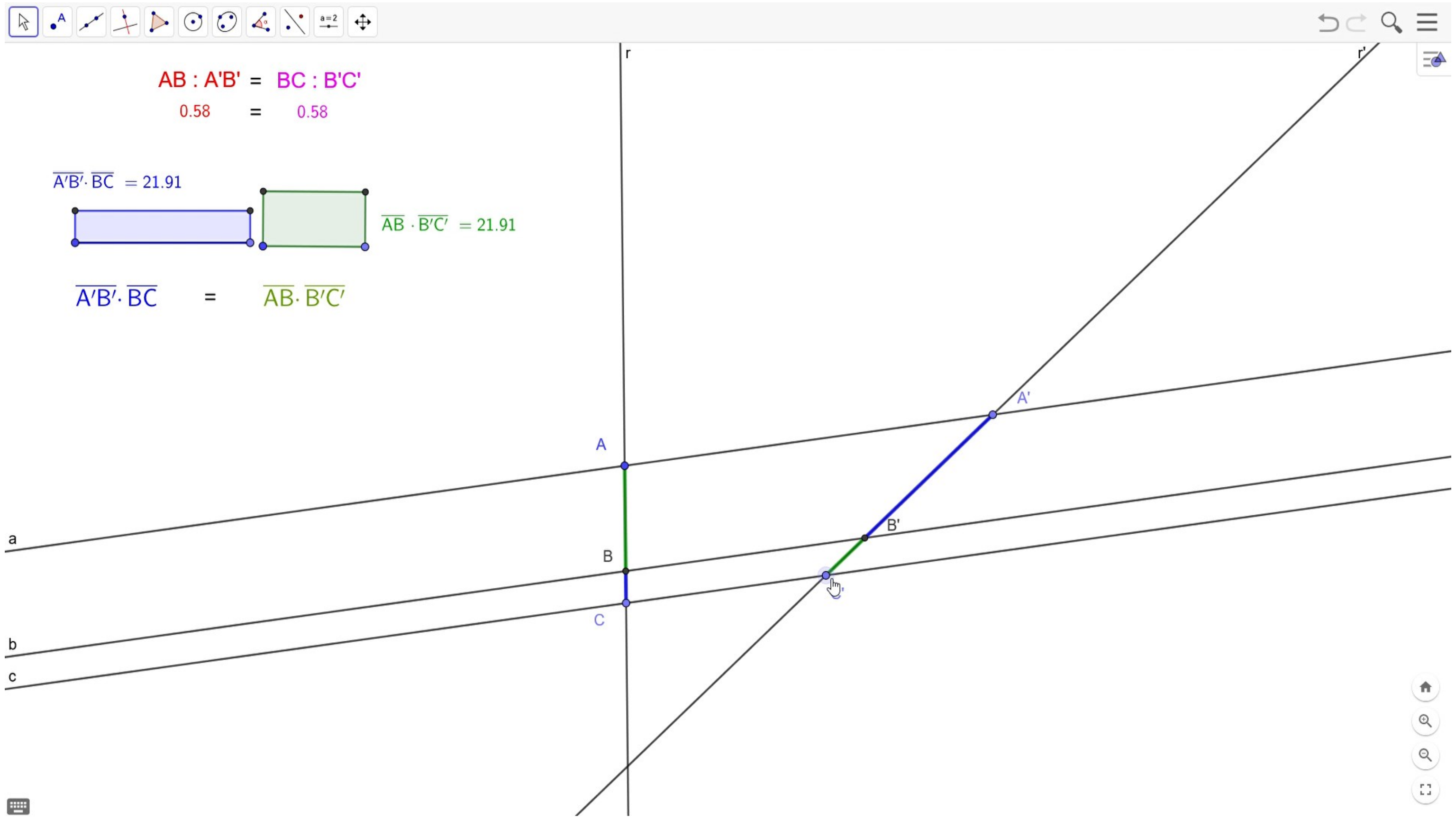
Ne viene che

da $x_0/x=y_0/y$ discende $y/x=y_0/x_o$.

Detto h il quoziente tra y_0 e x_0 ne viene che il quoziente tra le misure di due grandezze corrispondenti è lo stesso per ogni coppia.

Tale costante prende il nome di *costante di proporzionalità*.

Teorema di Talete



Definizione. Si dice fascio di rette parallele l'insieme di tutte le rette del piano che sono parallele ad una data retta *a.*

Due rette *r*,*r′* che intersecano *a* nei punti A, A′ intersecano la retta *b* parallela ad *a* nei punti B, B′.

Le rette *r* e *r′* sono chiamate trasversali e i punti A, A' e B, B′ si dicono corrispondenti. Anche i segmenti AB e

A'B' che congiungono punti corrispondenti vengono chiamati corrispondenti.

Teorema di Talete. Le due classi di segmenti corrispondenti individuati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.

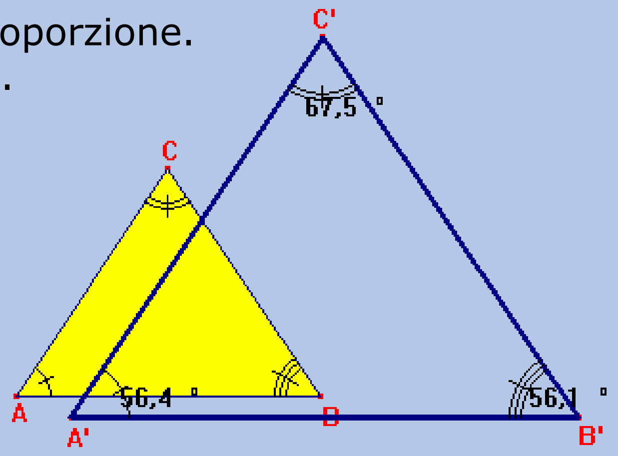
Corollario. In un triangolo una retta parallela ad un lato determina sugli altri due lati o sui loro prolungamenti segmenti proporzionali.

Teorema (Inverso del corollario). Una retta che determina su due lati di un triangolo o sui loro prolungamenti segmenti proporzionali è parallela al terzo lato.

Esercitazione proposta con GeoGebra: verifica sperimentale della proporzionalità dei segmenti e 2) della proprietà fondamentale delle proporzioni, con l'equivalenza dei rettangoli aventi come dimensioni rispettivamente i medi e gli estremi della proporzione stessa.

Similitudine tra triangoli

Definizione Due triangoli si dicono simili se hanno ordinatamente gli angoli uguali e i lati in proporzione.
Si dicono corrispondenti o omologhi i vertici degli angoli uguali e i lati opposti agli angoli uguali.



Il rapporto di due lati omologhi, ad esempio A'B' e AB, si chiama rapporto di similitudine.
Se il rapporto è uguale a 1 allora i triangoli sono congruenti: la congruenza tra triangoli è un caso particolare di similitudine.
Per stabilire se due triangoli sono simili non è necessario verificare tutte le condizioni richieste nella definizione, ma si può ricorrere ad uno dei criteri di similitudine:

I° criterio di similitudine

Due triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali, hanno i lati proporzionali.

Si può notare che questo risultato non vale per altri poligoni: basta pensare ad un quadrato ed ad un rettangolo con lati diversi.

II° criterio di similitudine

Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale sono simili.

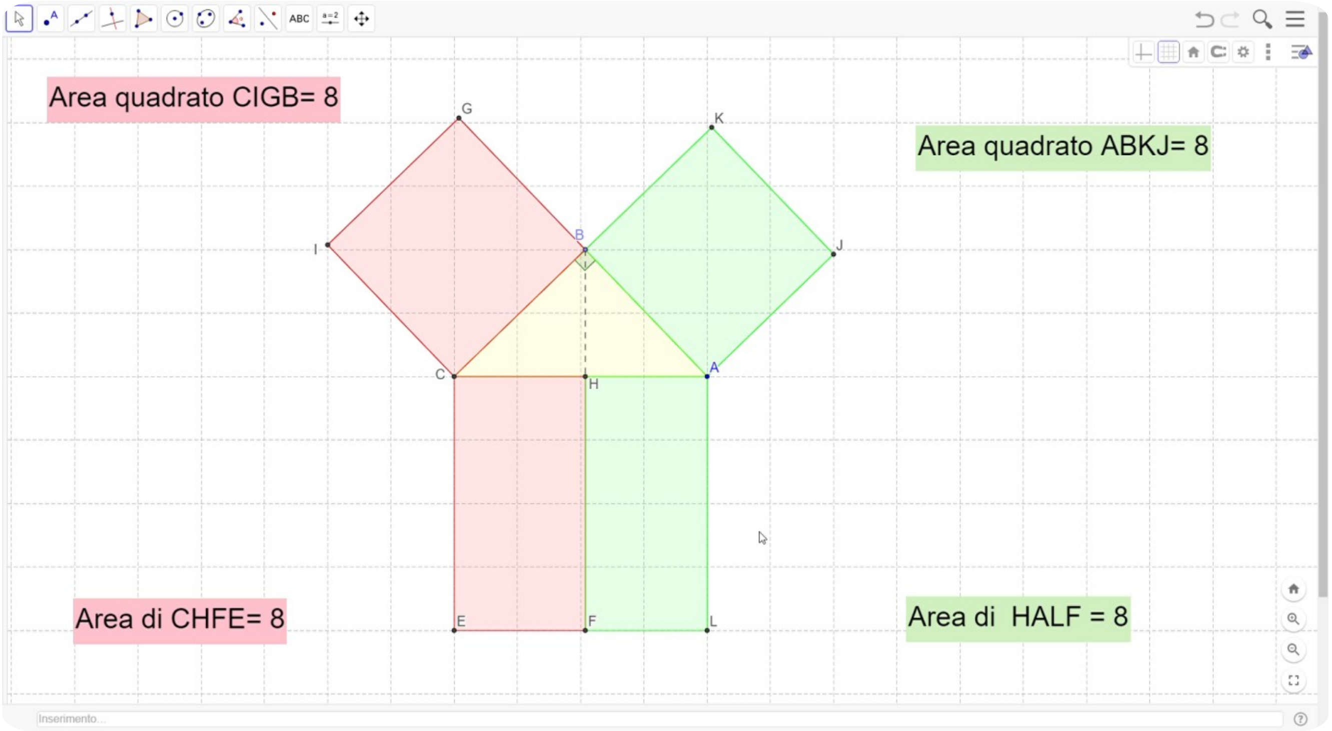
III° criterio di similitudine

Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione sono simili.

Valgono inoltre per i triangoli simili le proprietà espresse dal teorema. Se due triangoli sono simili
1.due lati omologhi sono proporzionali alle rispettive altezze
2.i perimetri sono proporzionali a due lati omologhi
3.i triangoli sono proporzionali ai quadrati costruiti su due lati omologhi

I° Teorema di Euclide.

In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l’ipotenusa e la sua proiezione su di essa



Un'importante applicazione della similitudine dei triangoli è il primo teorema di Euclide: dato un triangolo rettangolo ABC, tracciata l'altezza relativa all'ipotenusa BH, questa divide il triangolo in due triangoli rettangoli che sono a loro volta rispettivamente simili al triangolo di partenza ABC. Dunque:

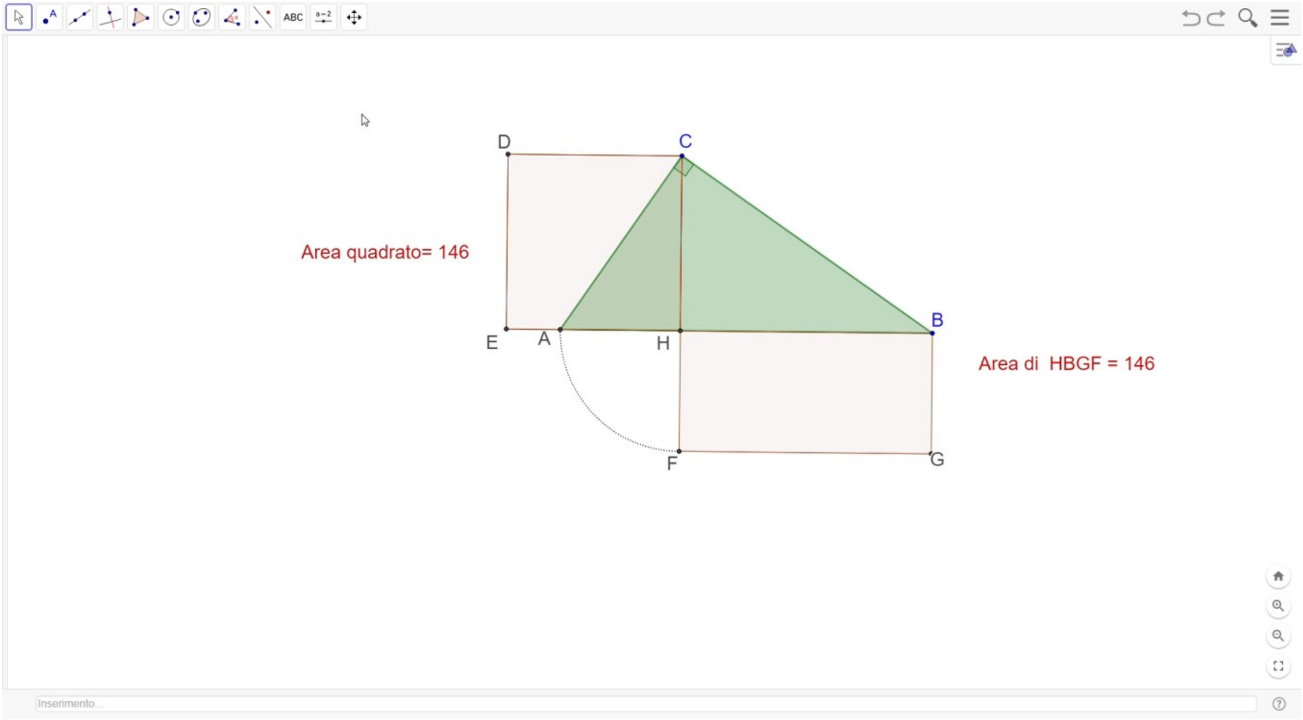
- BCH è simile ad ABC da cui si evince che AC:BC=BC:CH ovvero applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni si ha: $BC^2=AC\cdot CH$
- BAH è simile ad ABC da cui si evince che AC:AB=AB:AH ovvero applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni si ha: $AB^2=AC\cdot AH$

In definitiva: in ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa
oppure: in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.
Questa seconda enunciazione "geometrica" ci permette di costruire la nostra figura con GeoGebra. Osserviamo che dal 1° teorema di Euclide deriva un altro teorema che dovremmo già conoscere benissimo... il teorema di Pitagora!

Tratto : https://www.icportotolle.edu.it/didattica/primo-teorema-di-euclide
Esercitazione proposta agli studenti a cura dello scrivente C. Veronese

II° Teorema di Euclide.

II° Teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa



Proseguiamo con il secondo teorema di Euclide: dato un triangolo rettangolo ABC, tracciata l'altezza relativa all'ipotenusa CH, questa divide il triangolo in due triangoli rettangoli che sono tra loro simili, cioè il triangolo ACH è simile al triangolo BCH, da cui si evince che:

1) $AH:CH=CH:BH$

ovvero, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

2) $CH^2=AH \cdot BH$

Enunciamo il 2° teorema di Euclide derivandolo rispettivamente dalle due deduzioni precedenti:

1) in ogni triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

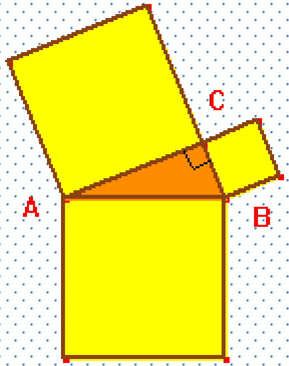
2) In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

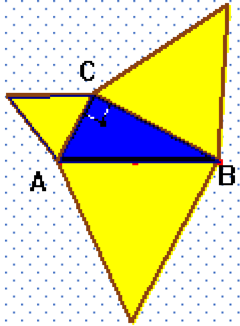
Questa seconda enunciazione, che fa riferimento all'equiestensione (quadrato CDEH equivalente al rettangolo BHFG) ci permette di costruire la nostra figura con GeoGebra.

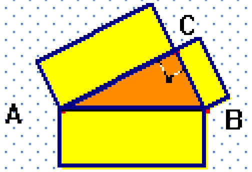
Suggerimento: muovi il punto C in corrispondenza dell'angolo retto (il triangolo è rettangolo in quanto è iscritto in una semicirconferenza con i=d) e sperimenta la conservazione delle aree.
Scarica il file originale sul tuo computer e aprilo con GeoGebra

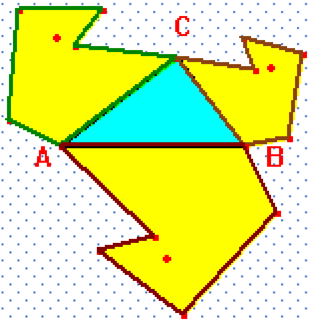
Tratto da: https://www.icportotolle.edu.it/didattica/secondo-teorema-di-euclide
Esercitazione proposta agli studenti a cura dello scrivente C. Veronese

Vale inoltre il *teorema*
Se si costruiscono sui cateti e sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo triangoli simili allora il triangolo costruito sull'ipotenusa equivale alla somma dei triangoli costruiti sui cateti









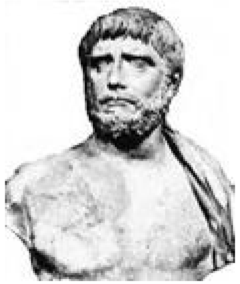

Tavoletta di Nippur


Mappamondo babilonese

Rapporto di similitudine o scala.

Nelle piante degli edifici e nelle carte topografiche o geografiche il rapporto di similitudine prende il nome di scala: in una carta topografica nella scala da 1 a 10000, se la distanza fra due punti sulla carta vale 1 cm, la distanza tra i punti del terreno corrispondenti vale 10000 cm cioè 100m.
Possiamo ricordare agli studenti che la necessità di rappresentare il territorio era già sviluppata presso le grandi civiltà medio orientali: i primi abbozzi cartografici furono realizzati con incisioni su tavolette d'argilla. Testimonianze degne di menzione sono una tavoletta, trovata in Mesopotamia, databile intorno al 2400-2200 a.C., raffigurante i fiumi Tigri e Eufrate e la città di *Nippur*, l'antico centro culturale dei Sumeri, e il cosiddetto *"mappamondo babilonese"*, proveniente da Uruk, che rappresenta la Terra come un cerchio circondato dall'acqua.

Biografie



Talete di Mileto (624 A.C. Mileto - 547 A.C. Mileto)

Nacque a Mileto, ricca città greca dell'Asia Minore, sede di un commercio fiorente con i paesi vicini. Secondo le notizie riportate da Proclo, a Talete viene attribuito il merito di aver trasportato in Grecia il patrimonio di conoscenze dei Babilonesi e degli Egiziani con particolare riguardo a nozioni geometriche e astronomiche. Si legge infatti nel "Commento" di Proclo: Talete *"andò dapprima in Egitto e da qui introdusse lo studio della geometria in Grecia. Non solo fece egli stesso parecchie scoperte, ma insegnò ai suoi successori i principi che stavano alla base di molte altre, seguendo in alcuni casi un metodo più generale, in altri uno più empirico."*
E' quindi riconosciuto come il primo matematico della storia, il primo cioè a ricercare regole generali su basi logiche per risolvere problemi di geometria a differenza dagli Egizi e dai Babilonesi che procedevano con metodi essenzialmente pratici e sperimentali.
In particolare a Talete vengono attribuiti alcuni risultati di geometria elementare: la congruenza degli angoli alla base di un triangolo isoscele, la congruenza di angoli opposti al vertice, un criterio di congruenza per i triangoli, la proprietà secondo cui un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.
Invece è accertato che il teorema secondo cui un fascio di rette parallele è tagliato in parti direttamente proporzionali da due trasversali (comunemente detto teorema di Talete) è stato dimostrato almeno un secolo dopo la sua morte. Platone afferma che Talete era abilissimo nell'escogitare espedienti tecnici, mentre lo storico Erodoto ci racconta che Talete progettò e realizzò un canale per deviare un fiume dal suo corso e farlo rientrare più avanti nel suo alveo.
La leggenda tramanda alcuni curiosi e interessanti episodi della vita di Talete: in Egitto stupì re Amasi misurando l'altezza di un obelisco con la misurazione dell'ombra di un bastone; con un analogo procedimento valutò l'altezza della piramide di Cheope, partendo dalla misura dell'ombra. Si narra inoltre che riuscisse con semplici confronti tra triangoli e con rudimentali strumenti a calcolare la distanza di una nave dal porto. Talete oltre che matematico fu anche filosofo: Aristotele sostiene, in veste di storico della filosofia, nel primo libro della *Metafisica*, che Talete è l'iniziatore della filosofia che ricerca le cause (αιτιαι) e il principio (αρχη) da cui scaturisce l'intera realtà nelle sue manifestazioni. Tale principio secondo Talete è costituito dall' acqua: osservando che il cibo degli esseri viventi è in buona parte costituito da acqua, così come i semi degli esseri viventi sono umidi egli mette in risalto l'assoluta centralità dell'acqua nella vita.

Pitagora di Samo (569 A.C. Samo - 475 A.C.)

Nato a Samo, figlio di un mercante, in gioventù accompagnò il padre nei suoi viaggi e tra i 18 e i 20 anni d'età a Mileto fu iniziato da Talete alla matematica. Passò molti anni in Egitto e poi in Babilonia e forse si spinse fino a Persepoli per poi andare in India. In verità nessun documento del suo tempo, che lo riguardi direttamente, è giunto a noi: sono andate perdute le sue numerose biografie, una delle quali dovuta ad Aristotele. Dobbiamo risalire a Proclo per avere precise notizie su di lui (anche se non del tutto affidabili secondo la critica storica moderna). Infine si trasferì a Crotone dove fondò una setta filosofico-religiosa, segreta e misteriosa. I membri di tale setta si distinguevano in "acusmatici", il cui compito era quello di ascoltare gli insegnamenti impartiti oralmente e "matematici", che invece avevano il compito di approfondire l'insegnamento pitagorico. A Pitagora e ai Pitagorici sono attribuiti la dimostrazione del famoso teorema sui triangoli rettangoli, del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo, la scoperta dell'incommensurabilità della diagonale con il lato del quadrato, la scoperta dei cinque solidi regolari. Scrive Proclo:"*Pitagora trasformò lo studio della geometria e ne fece un insegnamento più razionale, risalendo ai principi generali e studiando i teoremi astrattamente e con la pura intelligenza*". Pitagora ha dato fondamentali contributi alla teoria matematica della musica dimostrando che suoni distanti un'ottava sono prodotti da corde di lunghezza doppia e suoni distanti una quinta sono prodotti da corde di lunghezza in rapporto 3/2... "Tutto è numero" era una massima dei Pitagorici, che avevano dei numeri una concezione mistica. Si ritiene che i Pitagorici siano giunti a risolvere per via geometrica le equazioni di 1° grado e alcune equazioni di 2° .

Eudosso di Cnido (408 a.C. Cnido - 355 a.C. Cizico)

Astronomo e matematico greco che offrì importanti contributi al campo della geometria e propose per primo la spiegazione sistematica dei moti del Sole, della Luna e dei pianeti. Eudosso nacque in Asia Minore e fu allievo del tiranno seguace di Pitagora, Archita di Taranto; studiò poi per breve tempo filosofia e matematica con Platone, poi astronomia a Eliopoli (Egitto). Successivamente fondò la sua scuola a Cizico. A Eudosso viene spesso attribuita la scoperta del fatto che l'anno solare è lungo 6 ore in più dei 365 giorni; egli elaborò inoltre, ottenendo un discreto successo predittivo, un modello del sistema solare basato su una complessa disposizione di 27 sfere rotanti per spiegare i moti del Sole, della Luna e dei pianeti. Eudosso ebbe anche importanti intuizioni e risultati nel campo della matematica: spetterebbe a lui la formulazione di una nuova "teoria delle proporzioni" che comprendeva i rapporti tra grandezze commensurabili e incommensurabili. Euclide dedicò integralmente il V libro degli Elementi alla trattazione della teoria di Eudosso, che trova applicazione nei libri seguenti. Va sottolineato inoltre che questa teoria fu il riferimento per la trattazione delle grandezze addirittura fino alla seconda metà del XIX secolo.

Biografie

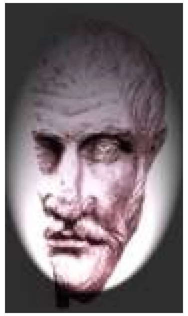
Euclide (365 A.C. Alessandria - 300 A.C. Alessandria)

Visse ad Alessandria, dove insegnò nella biblioteca , fu maestro di Tolomeo II, re d’Egitto e fondò una scuola matematica rimasta famosa. Le notizie che lo riguardano ci pervengono da testimonianze indirette e frammentarie ma soprattutto dai suoi lavori. Delle molte opere che egli scrisse purtroppo più della metà è andata perduta nel corso dei secoli. Egli trattò di aritmetica, geometria, ottica, astronomia, musica, meccanica. La sua opera principale è il trattato Elementi, opera grandiosa in 13 libri, una chiara esposizione di quelli che erano gli elementi fondamentali della matematica conosciuta. Si tratta del primo trattato nella Storia della Matematica in cui la geometria viene presentata come un sistema ipotetico-deduttivo. Gli Elementi costituiscono la più grande opera matematica dell'antichità, e la stessa evoluzione della matematica è stata grandemente influenzata da questo trattato, che è ancora oggi alla base dell'insegnamento della geometria nella scuola.

Nell’opera *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide* di Proclo (410-485 d.C.; filosofo e studioso di matematica, autore anche del cosiddetto *Elenco dei geometri*) alcuni aneddoti forniscono indizi sul carattere di Euclide. In uno di essi si narra che il re Tolomeo I chiese a Euclide una facile introduzione alla geometria, ovvero se ci fosse “*una strada più breve per imparare la geometria”*, invece che studiarla dagli *Elementi*, al che Euclide rispose che **"*non esiste nessuna strada regale che porti alla geometria*"**. Da tale aneddoto si deduce il severo rigore di Euclide, che lo induce a non fare concessioni didattiche, neanche al re.
L’intero brano di Proclo che riporta l’aneddoto è il seguente.

Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου, καὶ μέντοι καί φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστιν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοιχειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν.

PROCLUS, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, II, 4



Proclo (Museo di Atene)

Proclo (411 d.C. Costantinopoli - 485 d.C. Atene)

Proclo crebbe a Xanto, città della costa orientale della Licia dove iniziò i suoi studi con l’intento di intraprendere l'attività legale come il padre. A questo scopo fu mandato ad Alessandria: per approfondire i suoi studi fece anche un viaggio a Bisanzio e qui scoprì il suo interesse per la filosofia. Ritornò ad Alessandria e si dedicò alla filosofia con il maestro Olimpiodoro il Vecchio, in particolare approfondì gli studi sui lavori di Aristotele. Egli studiò anche matematica con Erone. Non del tutto soddisfatto dell'istruzione filosofica che stava ricevendo ad Alessandria, ancora adolescente andò ad Atene dove studiò all'Accademia di Platone con i filosofi Plutarco e Siriano. Divenne maestro e alla morte di Siriano, Proclo diresse l'Accademia e ebbe il titolo di Diadoco che vuol dire successore. Rimase e capo dell'Accademia dedicandosi all’insegnamento per il resto della sua vita. Uomo di grande sapienza, Proclo fu sempre ammirato dai suoi contemporanei. Seguì la filosofia neoplatonica fondata da Plotino . Egli è autore di numerose opere, molte delle quali ci sono pervenute, integralmente o parzialmente. In particolare Proclo è famoso per avere scritto un "Commento al primo libro degli elementi di Euclide". Il libro è certamente il prodotto del suo insegnamento all'Accademia. Proclo inoltre ha scritto *Hypotyposis,* un'introduzione alle teorie astronomiche di Ipparco e di Tolomeo in cui ha descritto la teoria matematica dei pianeti basata sugli epicicli e sugli eccentrici, unendo le sue conoscenze di geometria e di astronomia .

Biografie

G.F.Cantor (3 marzo 1845 San Pietroburgo - 6 gennaio 1918 Halle)

Seguì all'Università di Berlino le lezioni di Weierstrass, Kummer, Kronecher. Si laureò nel 1867 e nel 1869 ebbe una libera docenza all'Università di Halle. Nel 1879 ottenne una cattedra, sempre all'Università di Halle. All'età di 40 anni cominciò a soffrire di crisi depressive. Fino alla sua morte, avvenuta nella clinica psichiatrica di Halle, ebbe varie crisi mentali, acuite anche dall'ostilità verso i suoi studi mostrata da alcuni colleghi, tra i quali Kronecker.
Il nome di Cantor è legato alla teoria degli insiemi, di cui è stato il fondatore e alla costruzione dei numeri reali. Nel 1874 dimostrò che l'insieme dei numeri razionali è numerabile, così come anche l'insieme dei numeri algebrici (radici di equazioni polinomiali a coefficienti interi), mentre non è numerabile l'insieme dei numeri reali. Nel 1883 formulò la famosa ipotesi del continuo: non esiste un sottoinsieme di numeri reali che abbia cardinalità compresa tra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali.

Richard Dedekind (1831 Brunswick -1916)

Matematico tedesco, dopo un breve periodo all'università di Gottingen, dedicò gran parte della sua vita all'insegnamento. E' noto soprattutto per i suoi studi sulle proprietà dei numeri, in particolare egli definì i numeri reali come particolari 'sezioni' nell'insieme dei numeri razionali. La sua principale opera matematica 'Stetigkeit und die Irrationalzahlen' ottenne un grande successo ed ebbe una meritata fama. Tra i suoi contributi ci furono studi sull'induzione matematica, gli insiemi infiniti, la teoria dei numeri e la continuità. A lui si devono alcuni concetti fondamentali per l'algebra moderna come quello di 'anello' e di 'ideale'. Si occupò inoltre con successo della divulgazione di opere a carattere matematico.

Bibliografia di riferimento

Balestra A., Gnani G., La formazione degli insegnanti di matematica e scienze in modalità e-learning: un'esperienza europea, in: Borgato M.T.(a cura di), *Didattica e insegnamento della Matematica: esperienze e proposte,* Annali on line-Unife Didattica e formazione docente, n.4(2012), 149-162, ISSN: 2038-1034.

Bonati T. (1784). Saggio di una Nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e Nuovo metodo per trovare colla sperienza la quantità dell'acqua corrente per un fiume.

Bonati T. (1799). Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un'Acqua corrente

Brooks J.G., Brooks M.G. (1993). *In search of understanding: The case for constructivist classrooms.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Czerniak C.M. (2007). Interdisciplinary Science Teaching. In: S. K.Abel, N. G. Lederman (eds). *Handbook of research on Science Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, 537-559.

D'Amore B. (1988). Il Laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'Educazione Matematica*. 3, 41-51.

Dreiver R., Asoko K., Leach J., Mortimer E., Scott P. (1994). Construtting Scientific Knowledge in the Classroom. *Educational Researcher*. 4, 5-12.

Gnani G. (2001). Le valenze del corso di Laboratorio della Didattica delle Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella formazione degli insegnanti specializzati della SSIS (sede di Ferrara). In: G. Lucchini, F. Mercanti, G. Tallini (eds.). *Atti del Congresso Nazionale Mathesis*. Mantova 2001, 223-229.

Gnani G. Insegnamento integrato nella formazione dei docenti: il progetto Matematicainsieme, in: D'Amore B. Sbaragli S.(a cura di), *Pratiche Matematiche e Didattiche in Aula*, Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" n. 23, Castel San Pietro Terme, 6-7-8 novembre 2009, Bologna, Pitagora Editrice, 2009, 143-146, ISBN 88-371-1779-6.

Gnani G., Roselli V. (eds.) (2008). Idee e proposte per un corso di aggiornamento in didattica della matematica per docenti di Scuola Secondaria*. Quaderni di didattica della Matematica*. 2, Università degli Studi di Ferrara – SSIS.

Panizza M. (1978). Elementi di Geomorfologia. Pitagora Editrice Bologna.

Panizza M. (1988). Geomorfologia Applicata. La Nuova Italia Scientifica, Roma.

Pellerey M. (1998). *L'agire educativo. La pratica pedagogica tra modernità e postmodernità*. Roma: LAS.

Speranza F. (1990). Matematica e scienze: quale distinzione, quale integrazione?. *L'educazione matematica*. 2, 47-54.

Sundborg A. (1967). Some Aspects on Fluvial Sediments and Fluvial Morphology, 1, General Views and Graphic Methods, in "Geograph. Ann.", 49.

Venville G.J., Wallace J., Rennie, L.J., Malone, J.A. (2000). Curriculum Integration: Eroding the High Ground of Science as School Subject? *2 Science and Mathematics Education Centre*, Curin University of Technology, GPO Box U1987, Perth 6845 WA Australia.

Grazie per l’attenzione