Itinerari storici nell'insegnamento della matematica

Nicla Palladino, Università degli Studi di Perugia,
nicla.palladino@unipg.it
Nicolina Pastena, Università degli Studi di Salerno

La storia della Matematica in classe

- La storia della matematica può essere opportunamente ripercorsa in laboratori in cui esplorare itinerari ed intuizioni alla base delle scoperte, come strumento didattico per favorire apprendimento efficace, come prodotto a cui si perviene mediante un duplice approccio: operativo e strutturale.

La storia della Matematica in classe

- D’altra parte, uno dei limiti nell’apprendimento della matematica insegnata in classe sembra essere il suo presunto carattere di impersonalità ed atemporalità; allo studente solitamente vengono mostrati solo i risultati finali di lunghi processi a lui preclusi ed è quindi indotto ad una predisposizione negativa nei confronti della disciplina credendo ad una sua perfezione innata senza margine di errori.

I Laboratori

- Diversi sono i percorsi ad impronta laboratoriale costruiti tenendo presente queste premesse. Presentiamo, nell'ambito della geometria piana, due laboratori sorti a partire da ricerche storiche relative alla scoperta, all'evoluzione e a riflessioni, durate secoli, di alcuni concetti matematici: i poligoni stellati e la retta di Simson-Wallace.

- Alcuni laboratori:
  - I poligoni stellati
  - La retta di Simson-Wallace
  - I problemi di Fibonacci
  - La storia del limite

Geometria elementare

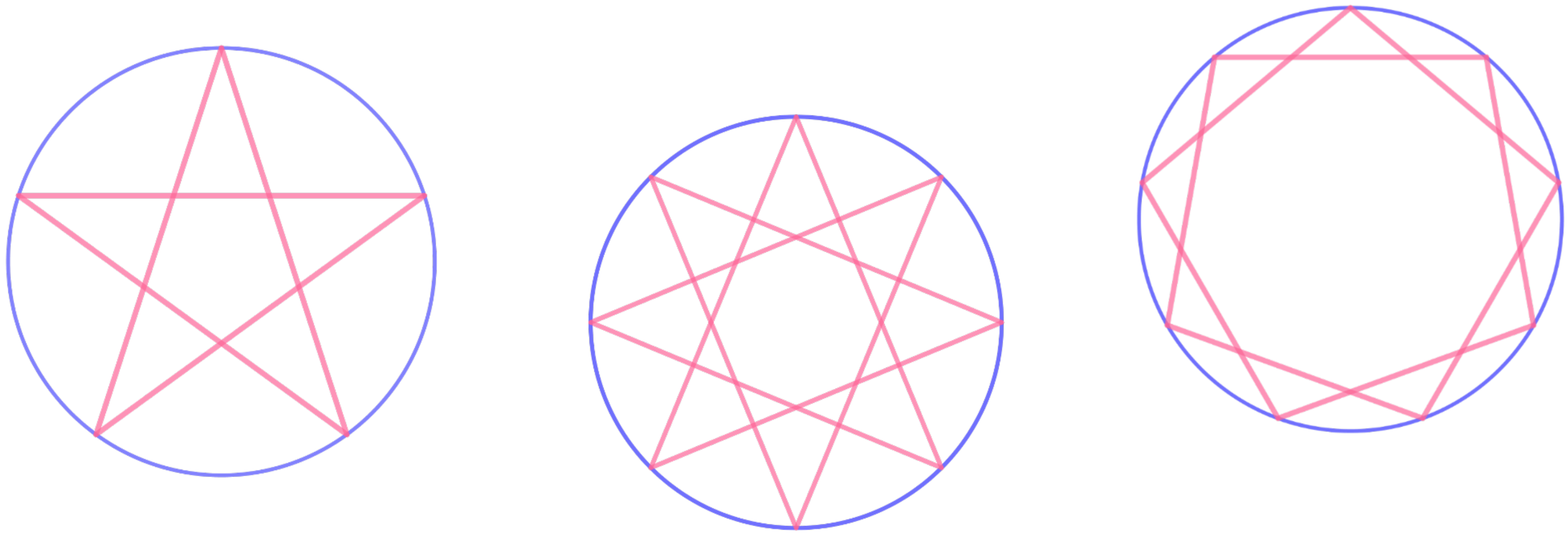
1. Poligoni stellati
2. Retta di Simson Wallace

1. La scoperta di poligoni stellati è partita probabilmente dall'osservazione di questi oggetti in natura ed è giunta, secoli dopo, ad una precisa identificazione degli stessi come soggetto matematico, con inequivocabili definizioni e accurate proposizioni. Le simmetrie e le affascinanti combinazioni spinsero gli artisti a creare pattern sempre più articolati, persuadendo i matematici ad elaborare progressivamente uno studio delle regolarità e delle proprietà che ne scaturivano.

2. L'itinerario laboratoriale che si sviluppa problemi classici relativi alla retta di Simson- Wallace e alle sue generalizzazioni, nonché al punto di Clifford e al cerchio di Feuerbach, è didatticamente interessante grazie allo stretto legame esistente tra la retta di Simson-Wallace e le ipocicloidi. E' un esempio di Geometria elementare, nel senso che non richiede particolari requisiti, ma certamente non banale e quindi particolarmente indicata anche per la formazione dei docenti.

I Poligoni stellati

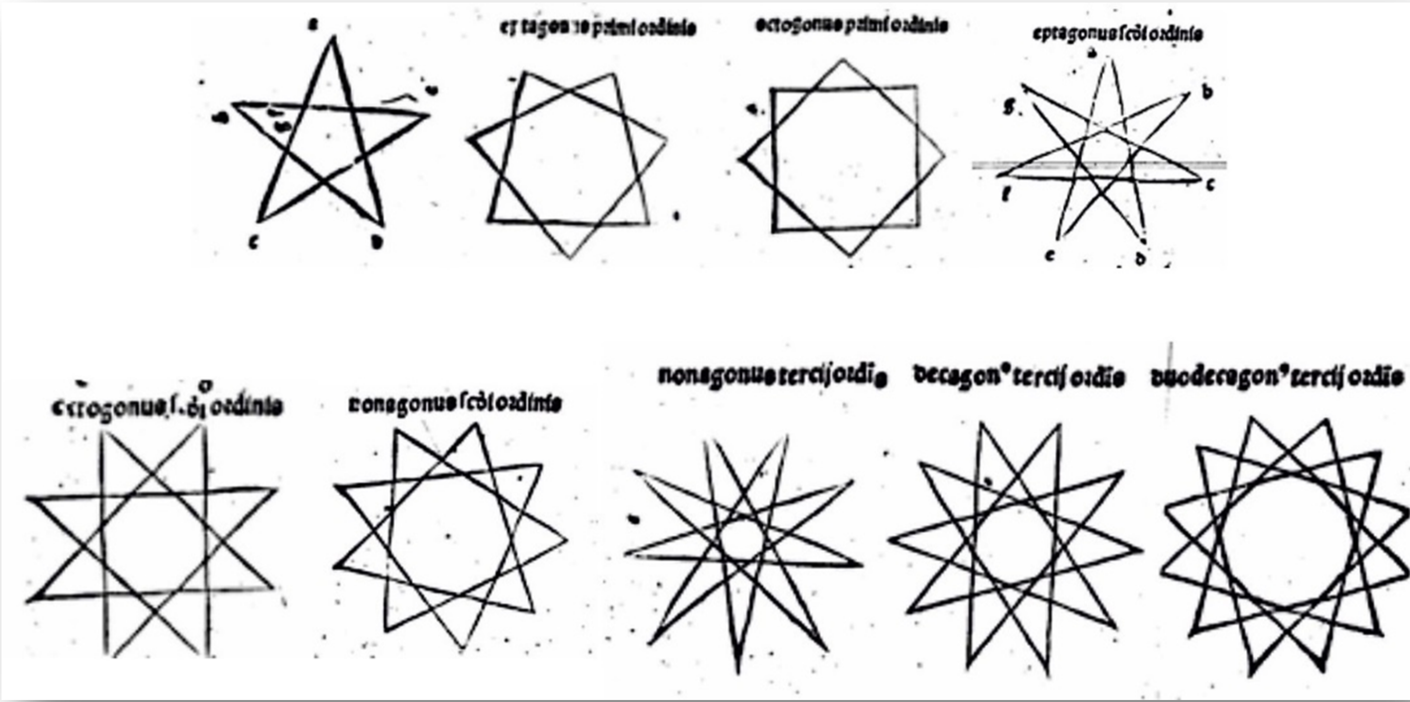
Dati n punti equispaziati su una circonferenza e uno spostamento h, con h < n, una figura stellata si ottiene congiungendo ciascuno di questi punti con il punto che si trova h posti dopo.



Chiamiamo ORDINE il numero n e SPECIE il numero h del poligono stellato.

I Poligoni stellati: storicamente

- Adelard da Bath (1080 – 1152)
- Bradwardine. (ca 1290 – 1349)
- Jan Brożek (1585-1652)
- …
- Keplero



I Poligoni stellati: storicamente

Perché la storia? All'inizio l'interesse fu da parte degli artisti

Piastrella stellata di Kashan, Iran XIII secolo

Volta della Sala de lo Mocarabes, Alhambra, Granada XIV secolo

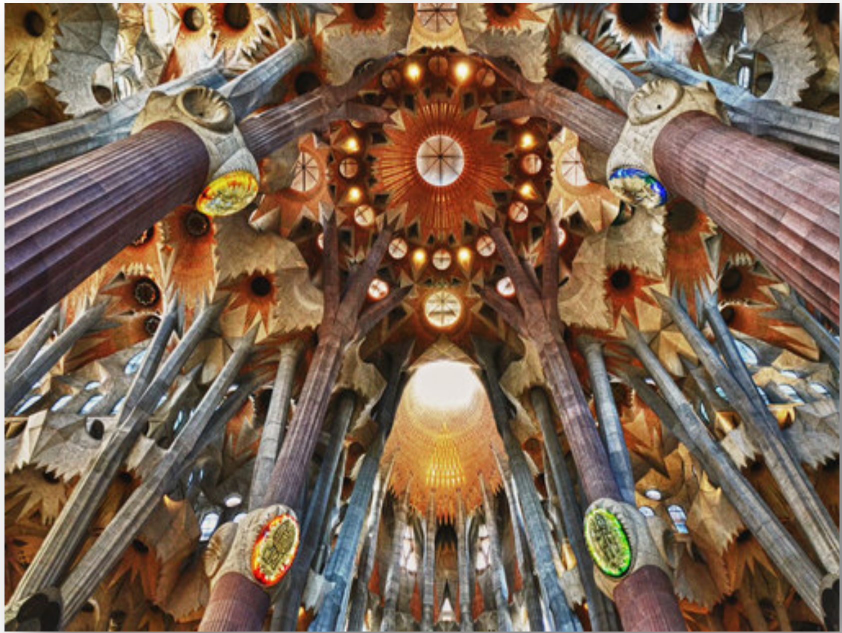
I Poligoni stellati: storicamente

Perché la storia? All'inizio l'interesse fu da parte degli artisti

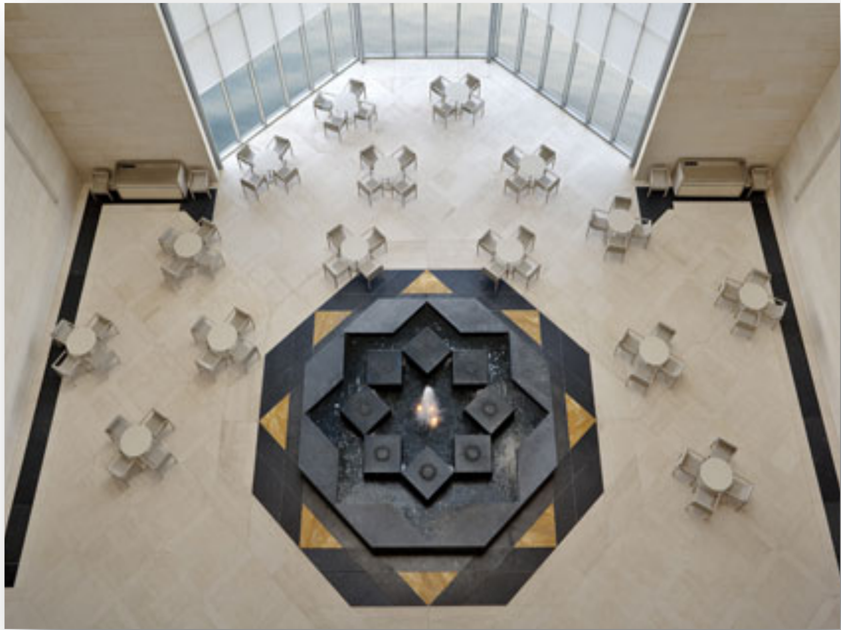
Cattedrale Vank, Iran XVII secolo

Soffitto arabo cappella Palatina, Palermo XII secolo

Poligoni stellati nell'arte

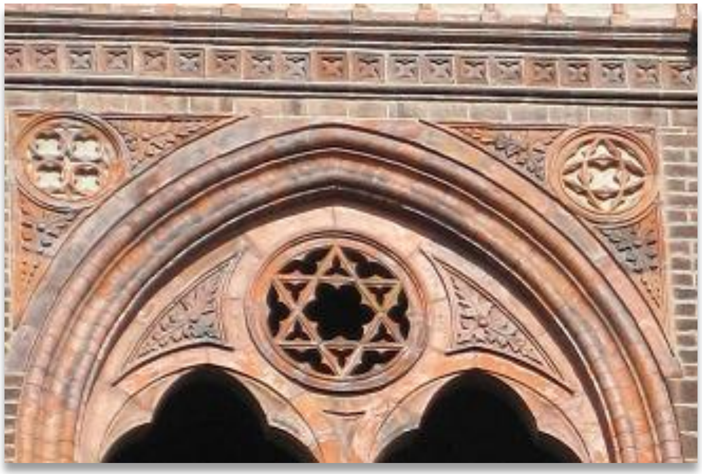


Volte stellate Sagrada Familia, Barcellona, inizio1882



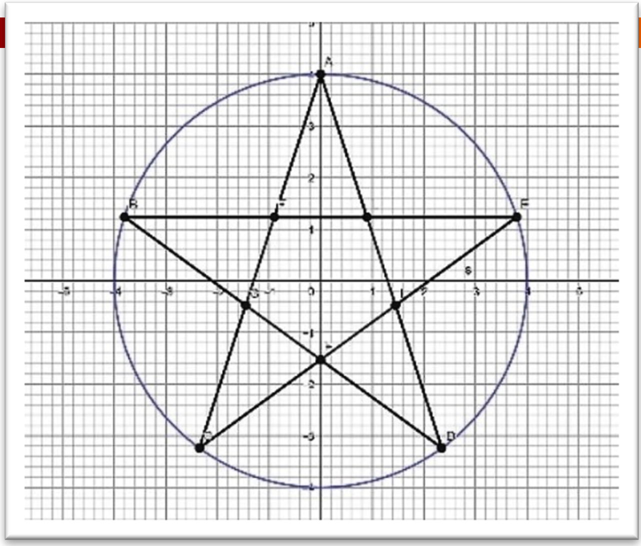
Ieoh Ming Pei, cupola del Museum of Islamic Arts, Doha, Qatar 2008

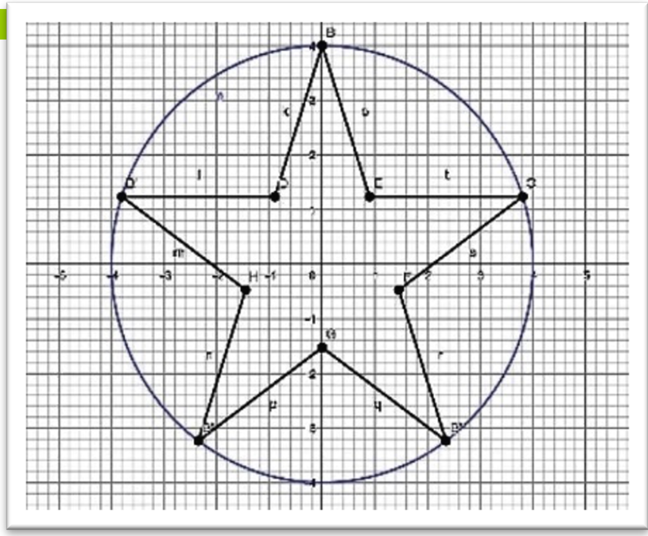
Il Laboratorio



Immagini in cui individuare figure stellate

Il Laboratorio: domande stimolo





- Le due figure, secondo quanto già studiato, sono dei poligoni?
- Di che tipo di poligoni si tratta?
- Quali e quanti sono i vertici? E quali e quanti gli angoli?
- Qual è l’ampiezza di ciascun angolo?
- Di che tipo di regolarità si tratta?
- Quante e quali sono le diagonali?
- Riesci a individuare gli angoli esterni?

Il Laboratorio: prime questioni. Quale definizione scegliere?

Un POLIGONO è un insieme di punti del piano

costituito da una poligonale chiusa non intrecciata

e dai suoi punti interni.

Si dice POLIGONALE una figura costituita da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascun segmento e il successivo sono consecutivi. Una poligonale è intrecciata se almeno due dei suoi lati non consecutivi si intrecciano.

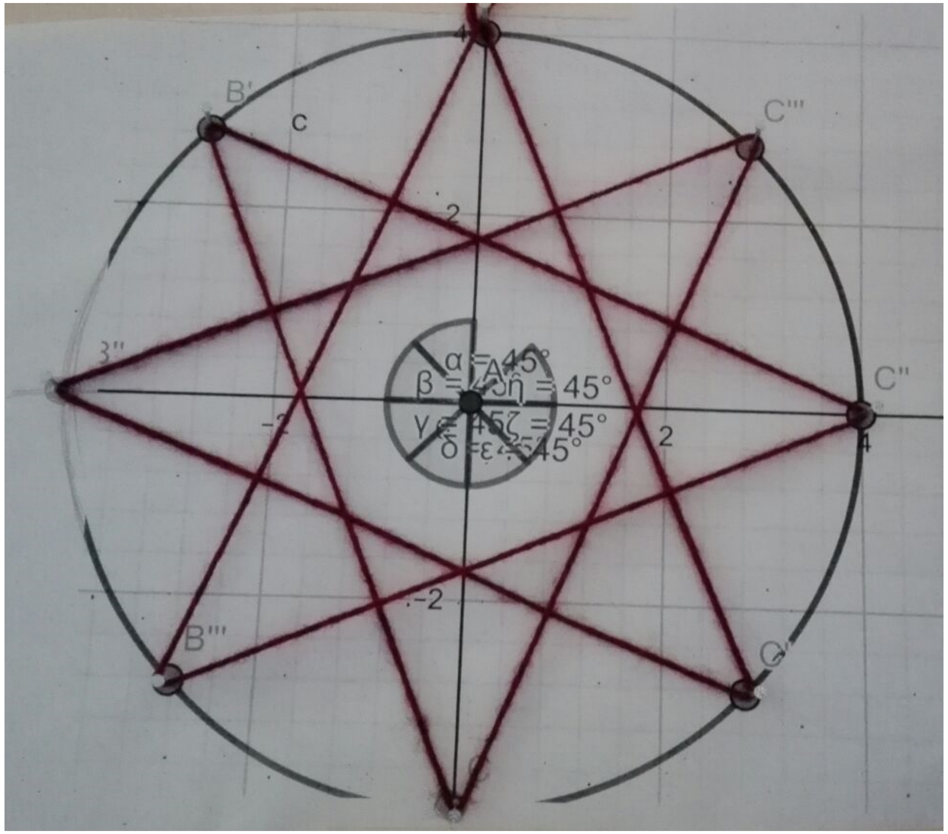
Il Laboratorio

DEFINIZIONE

Un *poligono* è un insieme di punti del piano costituito da una poligonale chiusa e dai suoi punti interni.

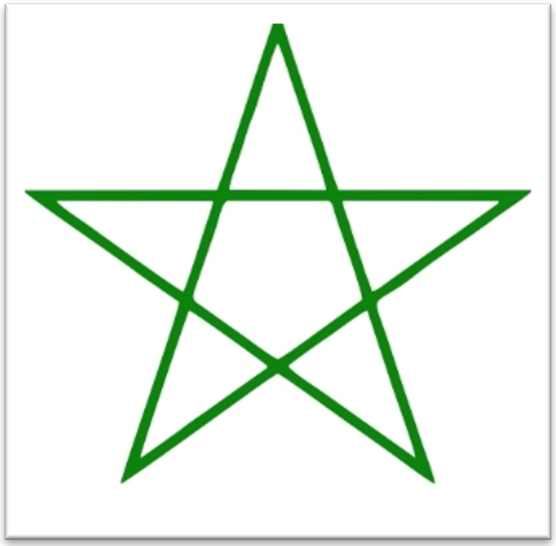
Il Laboratorio

Una figura stellata è un poligono se n e h sono coprimi tra loro, ossia se MCD(n,h)=1.
Se h divide n la figura stellata è formata da h poligoni convessi regolari di lati pari al quoziente tra n e h.



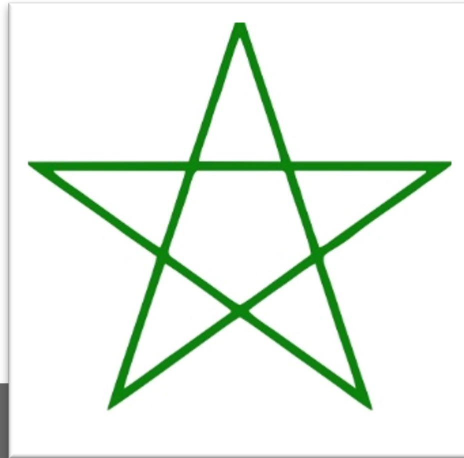
Caratterizzazione degli stellati

Prime questioni emerse: alcune misconcezioni



Il Laboratorio

- I segmenti di una poligonale sono detti LATI del poligono.
- Gli angoli interni sono gli angoli individuati da ogni coppia di lati consecutivi.

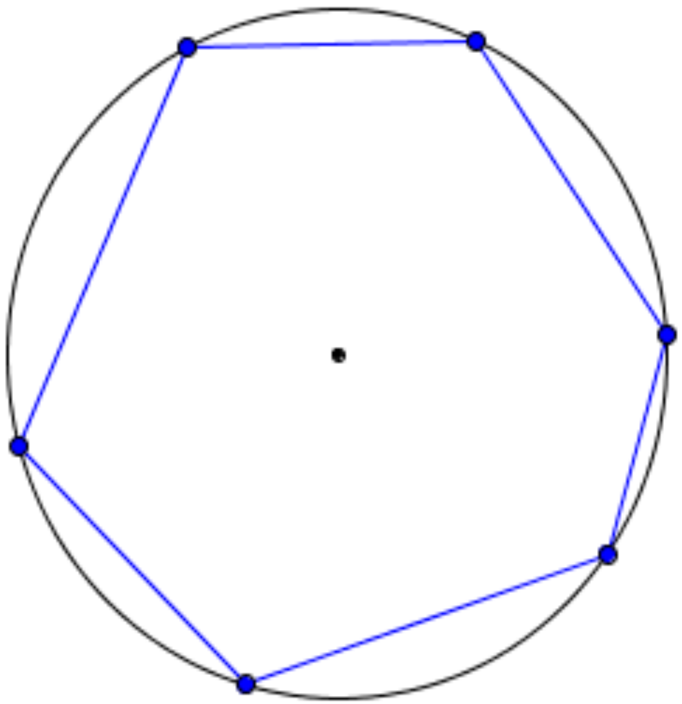


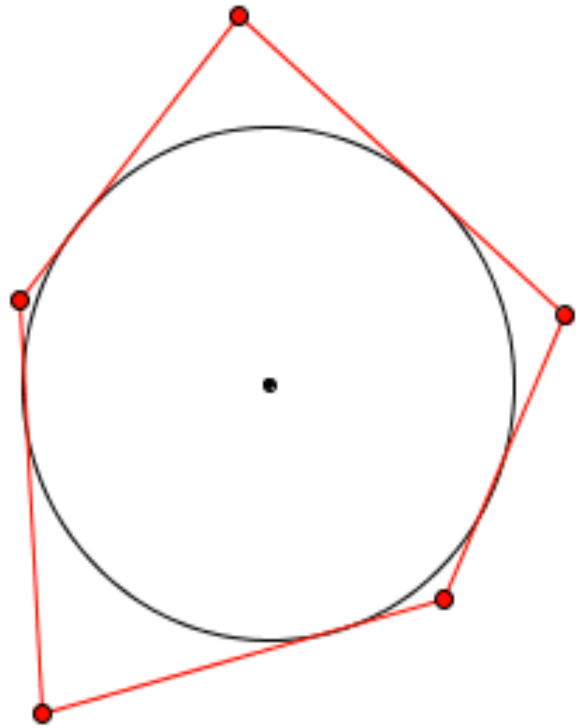
I poligoni stellati sono <u>equilateri</u>?
Sono <u>equiangoli</u>?

Il Laboratorio

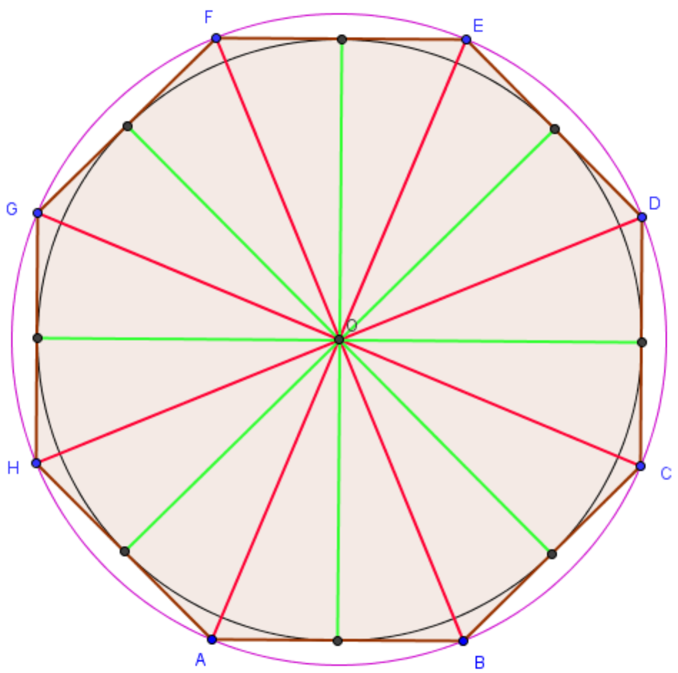
Un poligono è ISCRITTO in una circonferenza quando ha tutti i vertici sulla circonferenza.

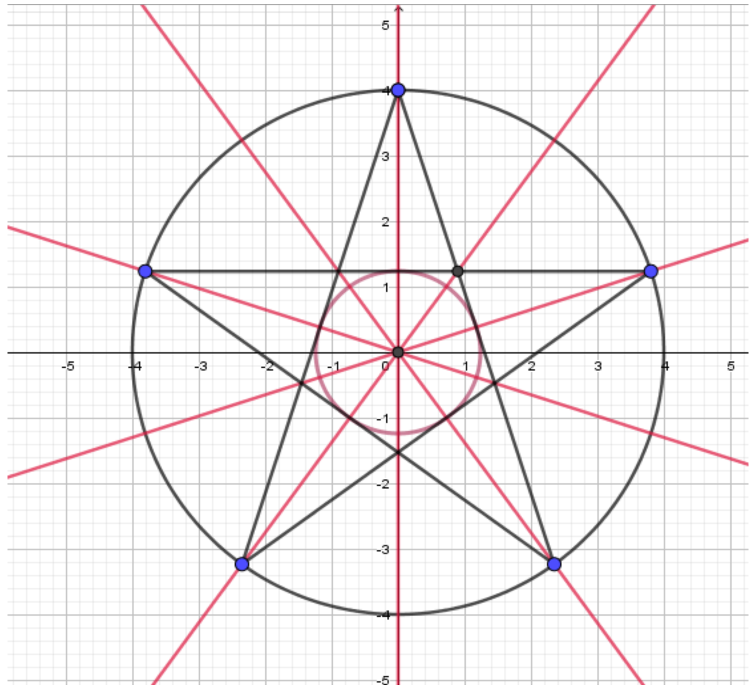
Un poligono è CIRCOSCRITTO a una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.





Un poligono è regolare se e solo se può essere inscritto e circoscritto a una circonferenza.





- Nel caso dei poligoni stellati gli assi del poligono coincidono con le sue bisettrici!

TEOREMA

- Un poligono può essere *inscritto* in una circonferenza se e solo se gli <u>assi</u> dei suoi lati si incontrano tutti in uno stesso punto.

- Il punto di intersezione degli assi dei lati del poligono è il centro della circonferenza.

TEOREMA

- Un poligono stellato può essere inscritto a una circonferenza se e solo se le <u>bisettrici</u> dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto.

- Il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli del poligono è il centro della circonferenza.

La somma degli angoli

TEOREMA

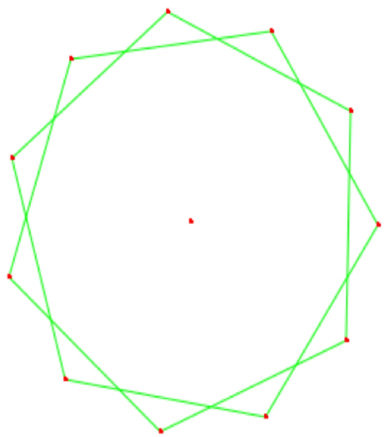
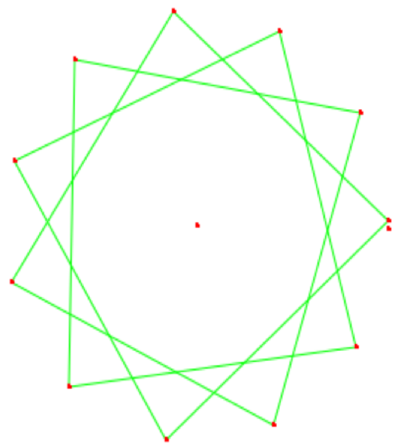
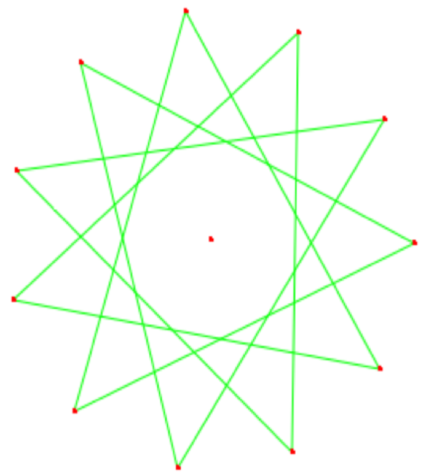
La somma degli angoli interni di un poligono **convesso** è $S_i = \pi(n-2)$.

TEOREMA

La somma degli angoli interni di un poligono **stellato** è $S_i = \pi(n-2h)$.

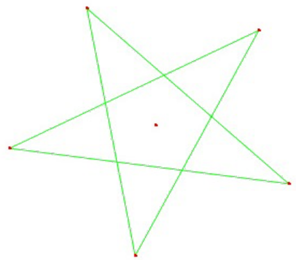
Come ci arriviamo….?

Adelard of Bath (1080-1152)

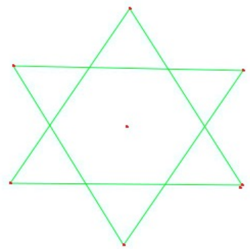
		
n=11, t=2 (h=2) S=2nR-8R=14R	n=11, t=4 (h=3) S=2nR-12R=10R	n=11, t=6 (h=4) S=2nR-16R=6R

Bradwardine:

Pentagono

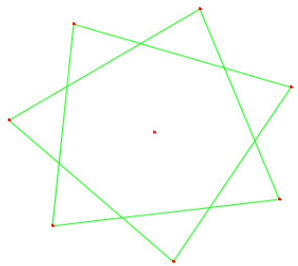


S=2R



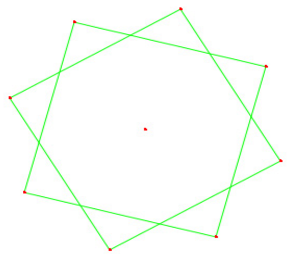
(Esagono)

S=4R



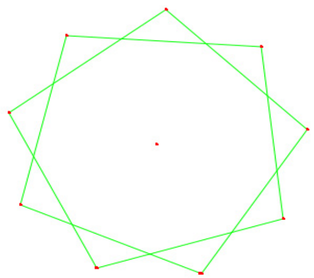
Ettagono

S=6R



(Ottagono)

S=8R



Ennagono

S=10R

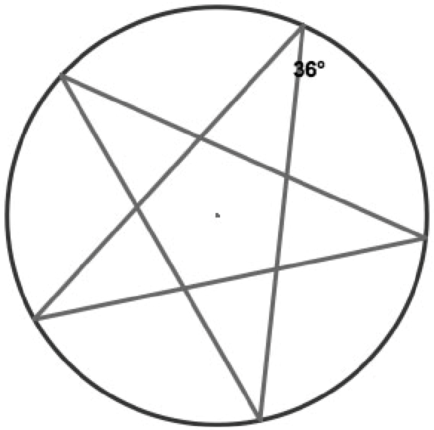
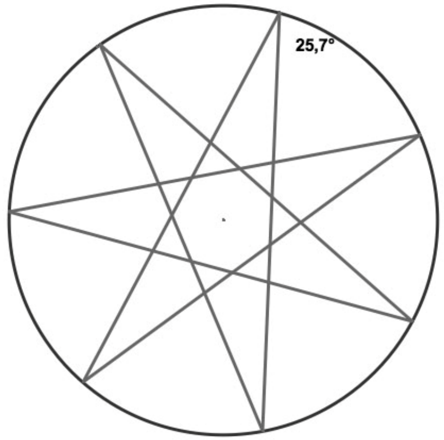
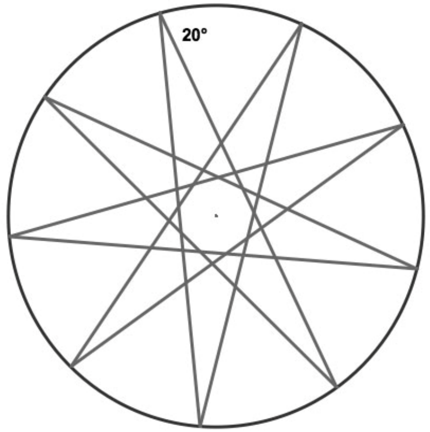
…

Il Laboratorio

TEOREMA
La somma degli angoli interni di un poligono stellato è
Si= $\pi(n-2h)$.

- non solo il triangolo ha la somma degli angoli pari a due retti, ma vi sono infiniti poligoni, con numero di lati dispari, a godere di questa caratteristica;
- vi sono infiniti poligoni a godere del fatto che la somma degli angoli interni è pari a quattro retti, come accade nel quadrilatero, ecc.

Il Laboratorio

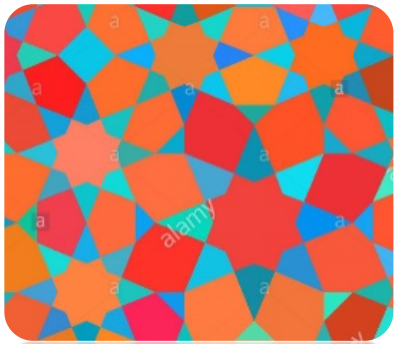
		
Pentagono stellato	Ettagono stellato	Ennagono stellato

$$h = \frac{n}{2} - \frac{S_i}{2}$$

Formula inversa di $S_i = \pi(n-2h)$

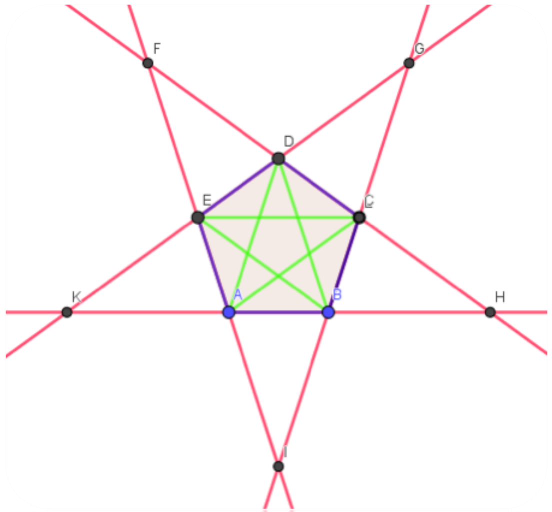
Poligoni stellati: spunti per numerose UDA

- ❖ Dal bidimensionale.. Al tridimensionale. (Poinsot)



- ❖ Induzione

- ❖ Tassellazione (trasformazioni nel piano)

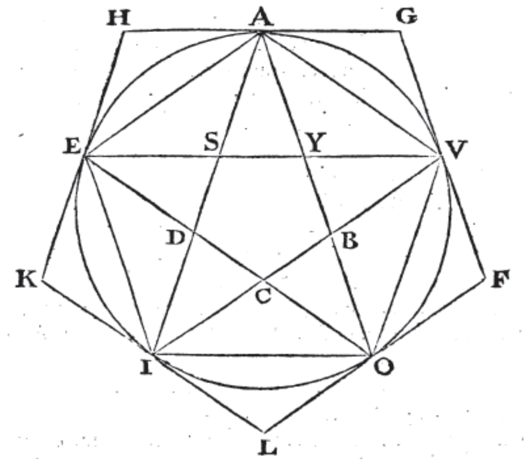


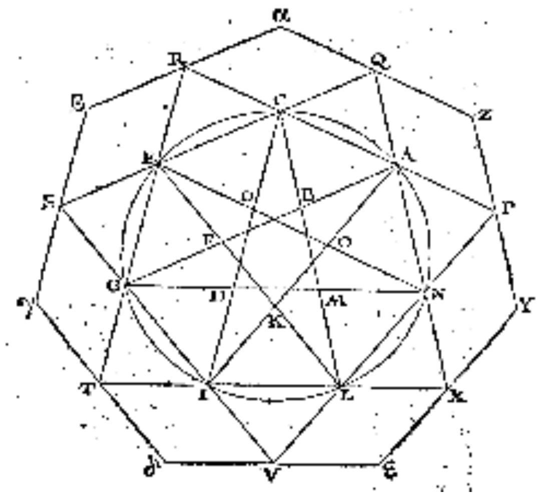
- ❖ Numero aureo

- ❖ Stellazione.. Introduzione alla dualità

Jan Brożek (1585-1652)

- He proved the theorems given by Bradwardine.
- Showed how it is possible construct star polygons with seven, nine, eleven,... sides with sum of the interior angles equal to two right angles.
- Conceived a special procedure for the construction of star polygons isoperimetric to the regular polygons that originate them.
- For the first time, he said that the star hexagon is formed by two triangles and the octagon (of II species) by two squares.



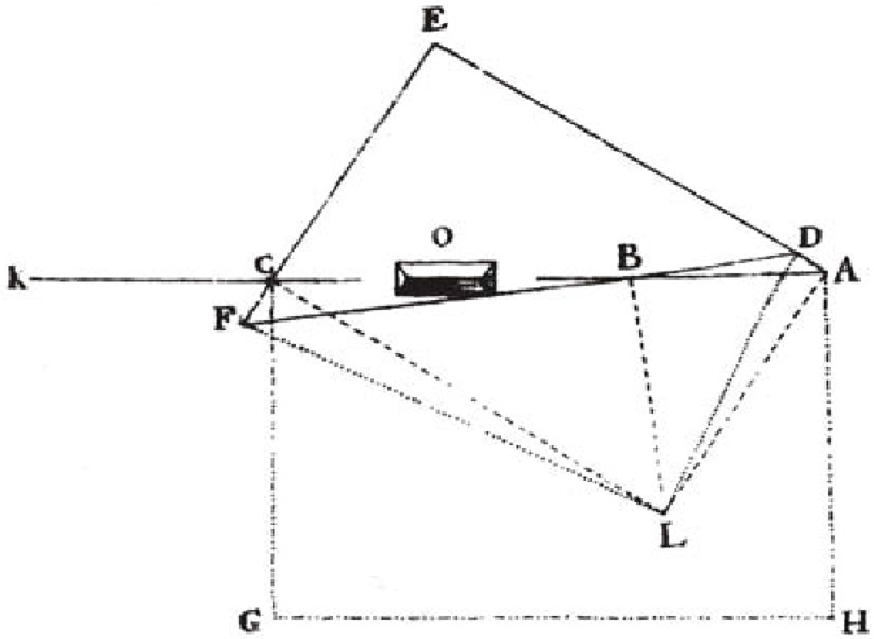


La retta di Simson-Wallace

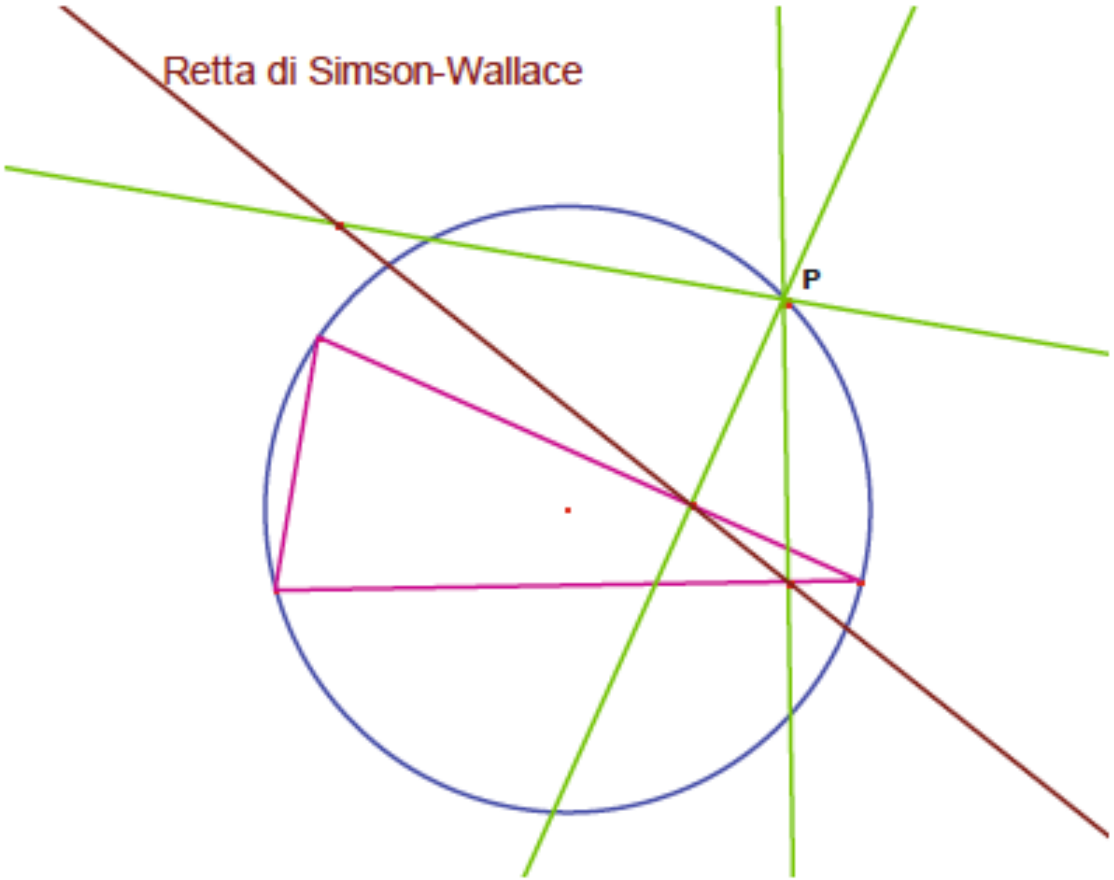
Sintesi

La retta di Simson-Wallace

- Nel 1814 François-Joseph Servois (1767-1847) utilizzò la retta di Simson-Wallace per cercare la soluzione ad una questione di Geometria pratica: “Prolungare una retta oltre un ostacolo che impedisce la vista, impiegando solo il supporto geometrico, e senza fare alcun concatenamento”.



La retta di Simson-Wallace



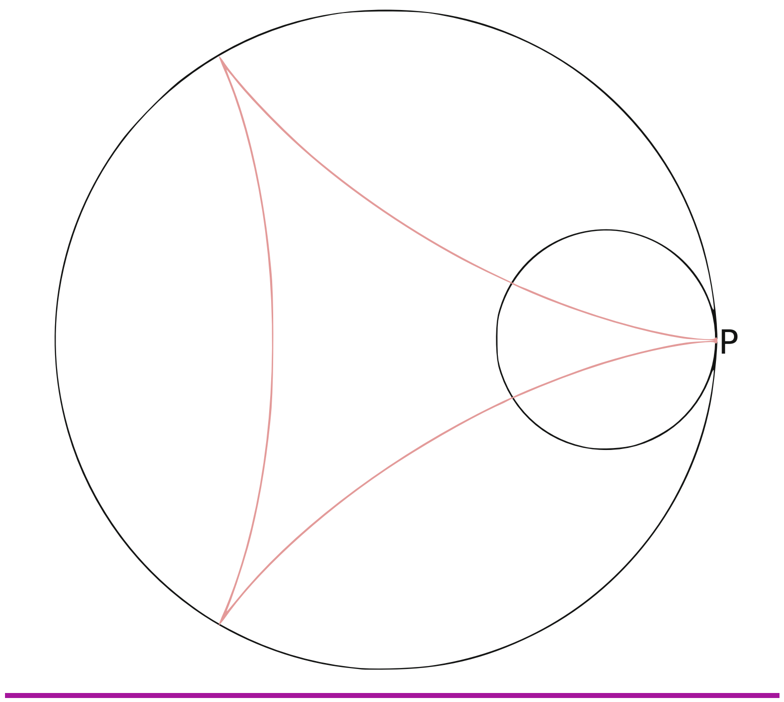
Dato un triangolo iscritto in una circonferenza, i piedi delle perpendicolari condotte da un punto della circonferenza ai lati del triangolo, o ai suoi prolungamenti, sono allineati e la retta su cui giacciono è detta retta di Simson- Wallace

La retta di Simson-Wallace

Generalizziamo: si consideri un poligono di n lati inscritto in una circonferenza e un punto P sulla circonferenza stessa. Per costruire la retta di Simson-Wallace del poligono, si omette di volta in volta uno dei vertici e per ciascuno degli n poligoni di n-1 lati ottenuti si costruisce la relativa retta di Simson-Wallace applicando un **procedimento di tipo ricorsivo**.

I piedi delle perpendicolari condotte da P alle n rette di Simson-Wallace appartengono tutti ad una stessa retta, la retta di Simson-Wallace del poligono.

La retta di Simson-Wallace

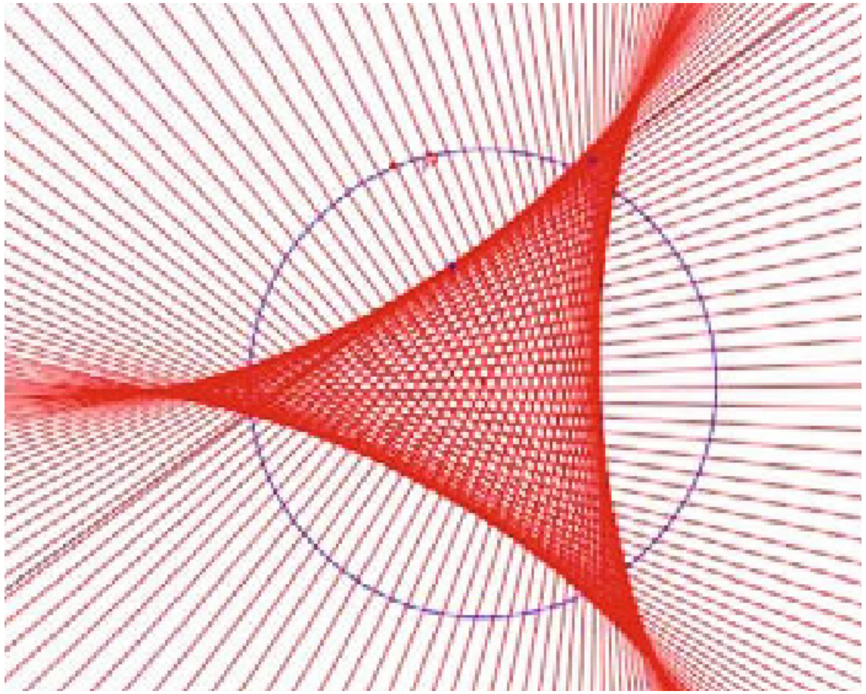


Ipocicloide: curva piana generata da un punto su una circonferenza che rotola all'interno di un'altra circonferenza.

Se il raggio r della circonferenza mobile è 1/3 (o 2/3) del raggio R della circonferenza fissa, la curva è l'ipocicloide tricuspide.

In generale, se la circonferenza più piccola ha raggio r e la più grande ha raggio R = kr, dove k è un intero, allora la curva che si forma è chiusa ed ha k cuspidi.

La retta di Simson-Wallace

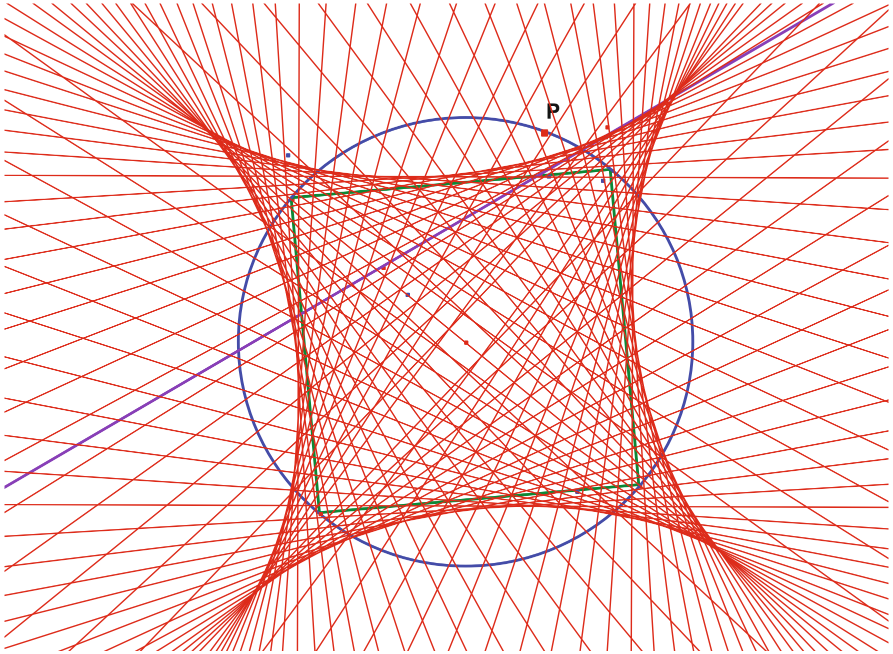


1857. Steiner descrisse l'inviluppo della retta di Simson-Wallace relativa ad un triangolo, mostrando che questa è una ipocicloide tricuspide.

Si deve al matematico italiano Luigi

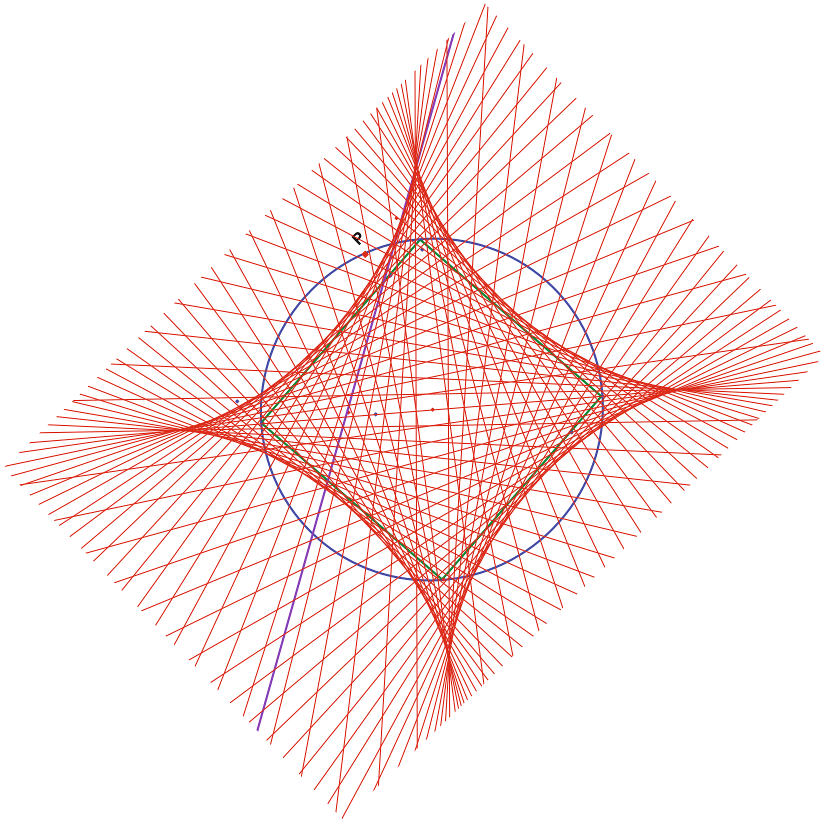
1864. Luigi Cremona prova l'equivalenza della quartica di Steiner con l'ipocicloide tricuspide attraverso un metodo puramente geometrico.

La retta di Simson-Wallace



Un risultato notevole (Steggall): l'inviluppo della retta di Simson-Wallace relativa ad un quadrato è una ipocicloide a quattro cuspidi (**astroide**).

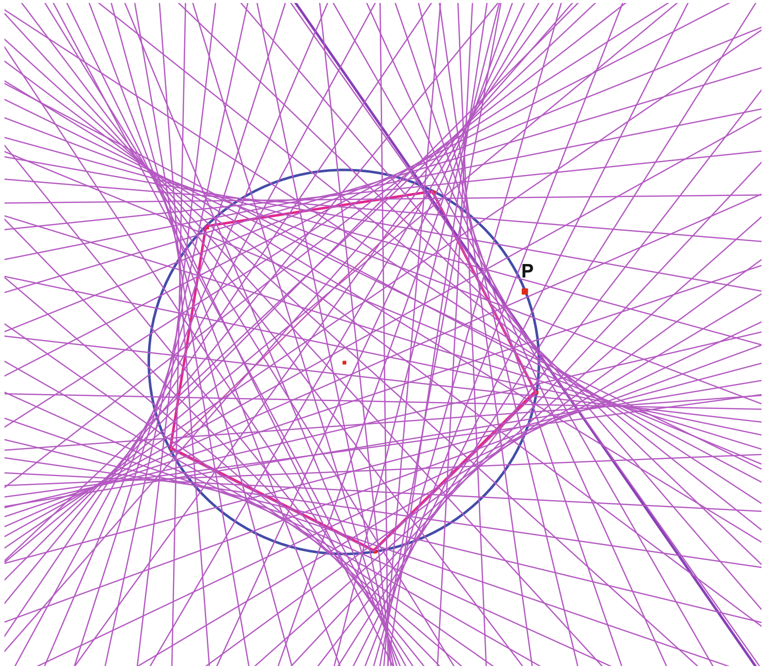
La retta di Simson-Wallace

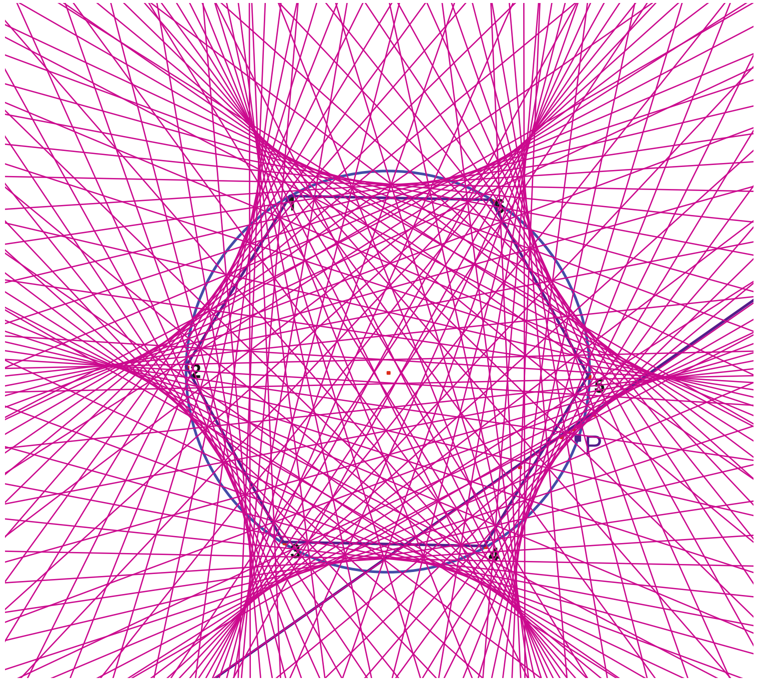


Un risultato notevole (Steggall): l'inviluppo della retta di Simson-Wallace relativa ad un quadrato è una ipocicloide a quattro cuspidi (**astroide**).

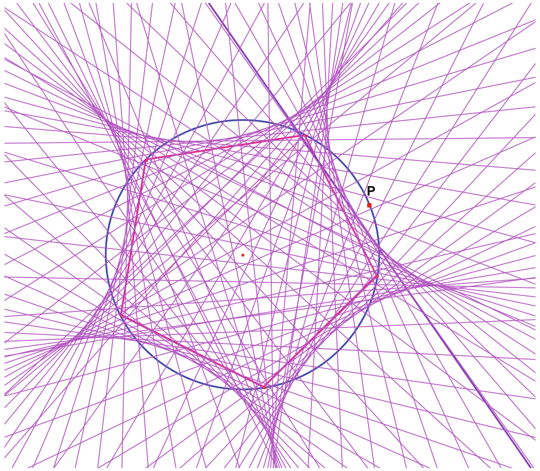
Pair of Earplugs Ornamented - early 9th–14th century - The Metropolitan Museum of Art

La retta di Simson-Wallace

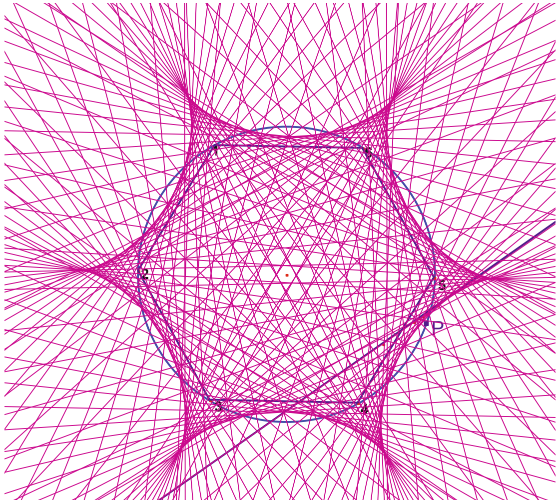




La retta di Simson-Wallace



Coin-set pendant - Late Antique, 4th century AD - http://www.britishmuseum.org



Diadem, 400–450 Ostrogothic - The Metropolitan Museum of Art

Conclusioni

- La trattazione storica può fornire spunti utili per la formazione dei docenti ed eventualmente per la realizzazione di attività didattiche incentrate su temi di Geometria elementare.
- Da un punto di vista strettamente storiografico, manca una trattazione storicamente fondata di tutta una serie di problematiche, tra cui quelle di cui qui abbiamo parlato, che, pur essendo elementari, hanno giocato un ruolo non indifferente nella formazione di matematici di primo piano e hanno anche avuto frequenti intersezioni con ambiti di ricerca più avanzata.
- Una "buona" Matematica elementare dovrebbe avere anche la caratteristica di significativi contatti con la ricerca attiva.

Riferimenti:

- N. Palladino. From the fourteenth century to Cabrì: convuleted constructions of star polygons. EP*Magazine* European Pupils Magazine - History Of Science And Technology, n. 35, 2-2014, pp. 13-17, I.S.S.N. 1722-6961.
- N. Palladino. I poligoni stellati da Broscius a Cabrì: spunti didattici e costruzioni geometriche. PROGETTO ALICE 2014 – II, vol. XV, n° 44, pp. 313-326.
- N. Palladino, M.A. Vaccaro. Un dibattito che continua in geometria elementare: La retta di Simson-Wallace e le sue molteplici generalizzazioni. Lettera Matematica Pristem, 97(1), 56-64, 2016, Milano, Springer, DOI 10.1007/s10031-016-0023-1. http://rdcu.be/nvRG
- A. Brigaglia, N. Palladino, M.A. Vaccaro. Historical notes on star geometries in mathematics, art and nature. In "Imagine Math 6 Between Culture and Mathematics" Editors: Emmer Michele, Abate Marco (Eds.), Springer International Publishing 2018. pp. 197-211. ISBN 978-3-319-93948-3. DOI 10.1007/978-3-319-93949-0.
- N. Palladino, M.A. Vaccaro. L'ipocicloide tricuspide: il duplice approccio di Luigi Cremona ed Eugenio Beltrami. In Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Anno XXXVIII · Numero 1 · Giugno 2018. PISA ROMA. FABRIZIO SERRA EDITORE.
- N. Palladino, G. Tini, M.A. Vaccaro. I poligoni stellati: origini storiche ed implicazioni didattiche. In "Matematica, Architettura, Fisica e Natura" a cura di F. Casolaro e S. Sessa, Aracne, Napoli 2019; pp. 239-248. ISBN: 978-88-255-2542-7.