

**«L'essenza della matematica sta proprio nella sua libertà»**

Maria Rosaria Enea

Matematica e Storia negli insegnamenti matematici

Ferrara, 22 aprile 2022

## - L'INFINITO IN MATEMATICA

Seguendo la terminologia aristotelica

- *L'infinito potenziale* è inteso come assenza di limiti. Qualcosa è potenzialmente infinito se le sue dimensioni possono essere sempre aumentate senza che questo processo finisca.
- Se si astrae da questo processo di formazione e se ne considera solo il risultato, cioè la totalità infinitamente completa di oggetti così prodotti, si arriva alla nozione di *infinito in atto*



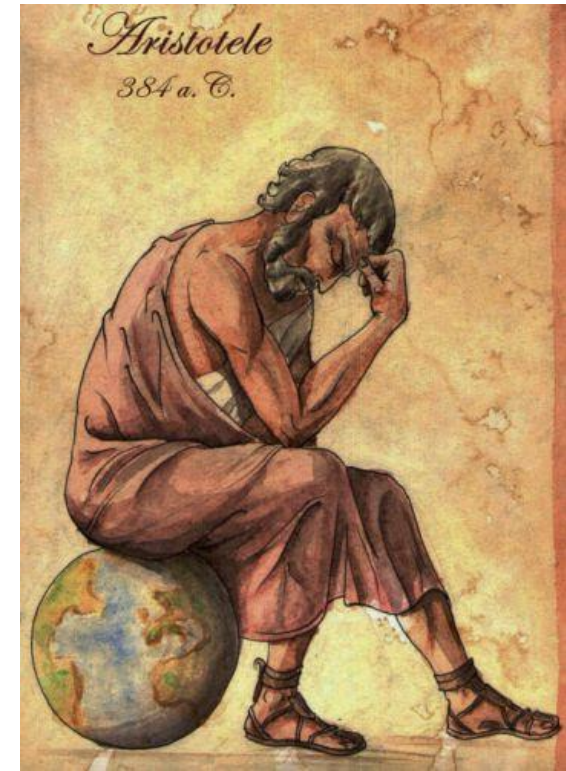
L'influenza della filosofia aristotelica, ha avuto l'effetto di bandire per secoli l'*infinito attuale* dalla Matematica.

**Aristotele** dichiarava che il problema dell'infinito doveva essere affrontato (Fisica IV secolo a.C.):

➤ *“Poiché la scienza della natura studia le grandezze, il movimento e il tempo, ciascuna di queste cose deve essere necessariamente o infinita o limitata quando anche accade che non ogni cosa sottostà a questa alternativa di essere infinita o limitata, come ad esempio una affezione o un punto (poiché queste cose non sono necessariamente l'una o l'altra), sembra conveniente, per chi si occupa della natura, esaminare il problema dell'infinito, se è o non è e, se è, che cosa è.”*

Ma affermava anche esplicitamente che:

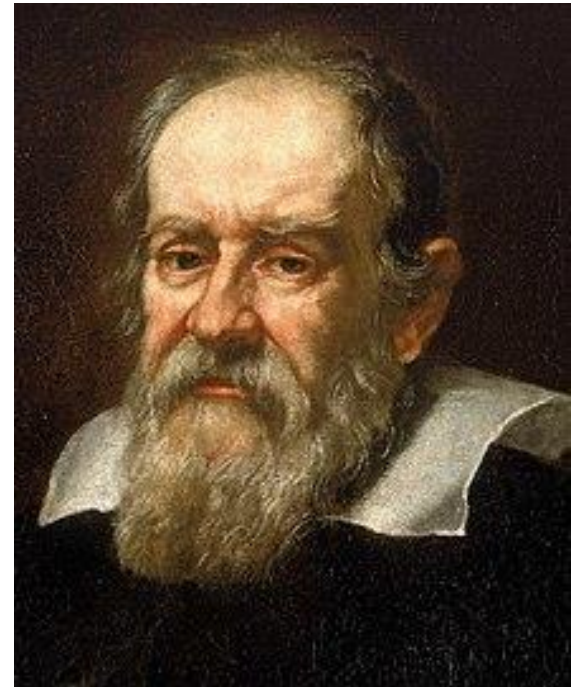
➤ *“Ma è impossibile che l'infinito sia in atto. Lo stesso numero può essere in potenza ma non in atto e quest'ultimo, inoltre, può essere un attributo ma mai una sostanza.”*



Ma anche i paradossi sugli insiemi infinitamente grandi, hanno fatto sì che anche grandi scienziati come **Galileo Galilei** affermassero:

- *“Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl’infiniti, **dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate**; il che penso sia inconveniente.”*
- *Salviati: “Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de’ quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, **gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo negl’infiniti, ma solo nelle quantità terminate**»*

*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1683)*



Ma ancora nel 1831 **Carl Friedrich Gauss** scriveva a **Heinrich Schumacher**:

- “[...] Io protesto contro l’uso di una quantità infinita come una grandezza compiuta, che in Matematica non è mai consentita. L’infinito è solo un modo di dire (*façon de parler*) ed intendere un limite cui certi rapporti possono approssimarsi vicino quanto vogliono.”



L'infinito attuale entra nella scena matematica nella seconda metà del XIX secolo, e possiamo considerare Georg Cantor come l'attore principale nella creazione di una teoria matematica dell'infinito.



Bernhard Bolzano - *I Paradossi dell'infinito* (1851)

Cantor scrive:

Bolzano è forse l'unico nel quale i numeri infiniti propri acquisiscano un qualche diritto, o quanto meno l'unico che li discuta a lungo; tuttavia *non* concordo assolutamente col suo modo di trattarli, che non gli permette di darne una definizione corretta, e per esempio considero inconsistenti ed errati i § 29-33 del suo libro. Per giungere a una vera concettualizzazione dei numeri infiniti determinati mancano all'autore sia il concetto generale di *potenza*, sia una nozione precisa di *enumerazione*. È vero che in alcuni passi possiamo trovare, sotto forma di casi particolari, gli embrioni dell'uno e dell'altra, ma a mio avviso l'autore *non* li porta a piena chiarezza e determinatezza, ed è così che si spiegano molte inconseguenze (e perfino alcuni errori) della sua opera, peraltro pregevole.



Cantor, usa l'infinito attuale per proporre precisi principi che dimostrino l'esistenza, accanto a numeri finiti, anche di numeri infiniti, o come li chiamerà, *transfiniti*.

*Sulle molteplicità lineari infiniti di punti (Über unendliche lineare punktmannigfaltigkeiten, 1883)*

La matematica si sviluppa in modo completamente libero, salvo l'ovvia avvertenza che i suoi concetti non possono essere in sé contraddittori e devono stare in un rapporto certo, regolato da definizioni, con quelli costruiti in precedenza e già disponibili e consolidati<sup>7)</sup>. Quando, in particolare, essa introduce nuovi numeri è tenuta solo a darne definizioni che assicurino loro una determinatezza, e in certi casi una relazione con numeri già dati, tali che sia possibile, caso per caso, distinguerli l'uno dall'altro. Non appena un numero soddisfa tutte queste condizioni lo si può e deve considerare esistente e reale in matematica. Sta qui, a mio avviso, il motivo (già accennato nel §4) per cui i numeri razionali, irrazionali e complessi vanno considerati esistenti tanto quanto gli interi positivi finiti.

Non credo ci sia da temere, come fanno molti, che da questi principi possa venire un qualsiasi pericolo per la scienza; da un lato le condizioni indicate sopra, che sole permettono di praticare la libera costruzione dei numeri, lasciano uno spazio ristrettissimo all'arbitrio, dall'altro ogni con-

certo matematico ha in se stesso il proprio indispensabile correttivo: se è sterile o inadatto allo scopo la sua inutilità si rivelerà assai presto, e lo si lascerà cadere per mancanza di risultati. Trovo invece che ogni limitazione non necessaria dell'impulso matematico alla ricerca porti con sé un pericolo molto maggiore, tanto più che non se ne può ricavare giustificazione alcuna dall'essenza della disciplina; l'essenza della *matematica*, infatti, sta proprio nella sua *libertà*.

Anche se questa natura della matematica non mi fosse stata chiara per i motivi già detti, tutta la sua evoluzione, che abbiamo sotto gli occhi in questo secolo, mi porterebbe esattamente alle stesse idee.



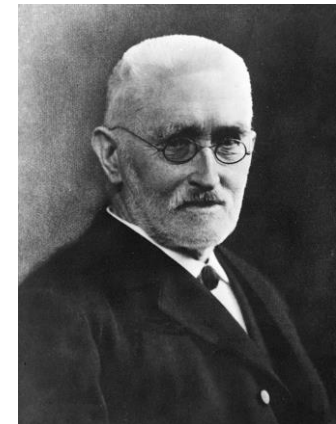
## ESTIMATORI E DETRATTORI

- **Poincaré**: la teoria di Cantor “ *era una malattia, un bizzarro stato di malessere da cui un giorno la matematica sarebbe guarita.* ”
- **Hilbert**: “ *nessuno ci caccierà dal paradiso che Cantor ha aperto per noi* ”.
- **Kronecker**: “ *i numeri interi positivi sono i soli creati da Dio tutto il resto è opera dell'uomo e quindi sospetto.* ” Non accettava le scoperte di Cantor “ *il lavoro di Cantor sui numeri transfiniti e sulla Teoria degli insiemi non è matematica, ma misticismo* ” e definiva Cantor un “ *corruttore di giovani menti* ”,
- **Cantor muore il 6 gennaio del 1918.**



## L'ARITMETIZZAZIONE DELL'ANALISI

- Per i matematici della seconda metà dell'Ottocento era chiaro che occorreva edificare l'analisi, il calcolo differenziale, su basi che non rimandavano più a intuizioni geometriche, ma erano esplicitate in termini di oggetti e processi *aritmetici* elementari.
- **Richard Dedekind**, Continuità e numeri irrazionali (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*), 1872:
  - “[...] *discutendo la nozione del tendere di una grandezza variabile a un valore limite, e in particolare nella dimostrazione del teorema che ogni grandezza variabile che aumenta con continuità, restando però limitata, deve certamente tendere a un limite dovevo ricorrere all'intuizione geometrica. [...] Questa forma di introduzione del calcolo differenziale non può pretendere di essere scientifica. Anche le esposizioni più rigorose del calcolo differenziale non basano le loro dimostrazioni sulla continuità bensì [...] fanno ricorso a nozioni geometriche o comunque suggerite dalla geometria, oppure dipendono da teoremi che non sono mai stati stabiliti in maniera puramente aritmetica.*”



- Nel 1872 Weierstrass, Dedekind e Cantor riuscirono contemporaneamente, ma per vie diverse, a realizzare il passo decisivo verso l'aritmetizzazione dell'analisi, riuscirono infatti a definire i reali per mezzo dei razionali, il passo successivo sarebbe stato una definizione rigorosa dei numeri naturali data da Dedekind e Peano
  
- **Qualche notizia biografica:**
  - Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasce a San Pietroburgo il 3 marzo del 1845, ma nel 1856 si trasferisce con la famiglia in Germania.
  - Studia all'Università di Berlino, che sotto la guida di Kummer, Kronecker e Weierstrass
  - Cantor conclude i suoi studi nel dicembre del 1867 con una dissertazione di Teoria dei numeri sotto la supervisione di Kummer
  - Nel 1869 consegue l'abilitazione a *Privatdozent* all'Università di Halle sotto la direzione di Eduard Heine. È sotto l'influenza di Heine che Cantor comincia ad occuparsi delle serie trigonometriche, in particolare Cantor si occupa del problema generale dell'unicità della rappresentazione delle funzioni in serie trigonometriche.

*Sulla estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche (Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen, 1872)*

- Cantor premette quelle che lui stesso chiama “*considerazioni utili, a meglio illuminare certi fatti che sono invariabilmente presenti non appena siano date delle grandezze numeriche, in numero finito o infinito.*”

□ Nel primo paragrafo Cantor definisce i numeri reali partendo da successioni infinite di numeri razionali positivi: **definisce numero reale una successione fondamentale (di Cauchy) di numeri razionali**

- Una successione di numeri razionali  $\{a_n\}$  viene detta **fondamentale** se per ogni valore razionale  $\varepsilon > 0$ , esiste un numero naturale  $\nu$  t.c.  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ , per ogni  $m, n > \nu$ .

- Due successioni fondamentali  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono “equivalenti”, cioè sono lo stesso numero reale esattamente quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$$

- Conseguenza logica della sua costruzione è che, per ogni numero reale  $b = \{a_n\}$

“ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  esiste ed è uguale a  $b$ ”

- Quali sono le difficoltà di questo lavoro di Cantor, da cosa nascono le critiche che ne verranno: **i “numeri” così definiti sono oggetti *infiniti***, che vengono trattati come oggetti in sé, *dati in atto*, come oggetti compiuti e non come *entità potenziali*.
- Cantor si rende conto che il processo che gli ha permesso di definire i reali, si può iterare considerando successioni fondamentali di numeri reali.....
  - *numeri del primo ordine* (Reali)
  - *numeri del secondo ordine*,
  - e così via...*del terzo ordine*.....

**È proprio questo tipo di iterazione che daranno luogo alle prime considerazioni sull’infinito di Cantor, iterando si può tenere conto «della diversa forma e contenuto concettuale dell’esser dato»**

- **Ogni successione fondamentale di numeri reali è convergente, ovvero il campo dei numeri reali è completo, intuitivamente “senza buchi”.**

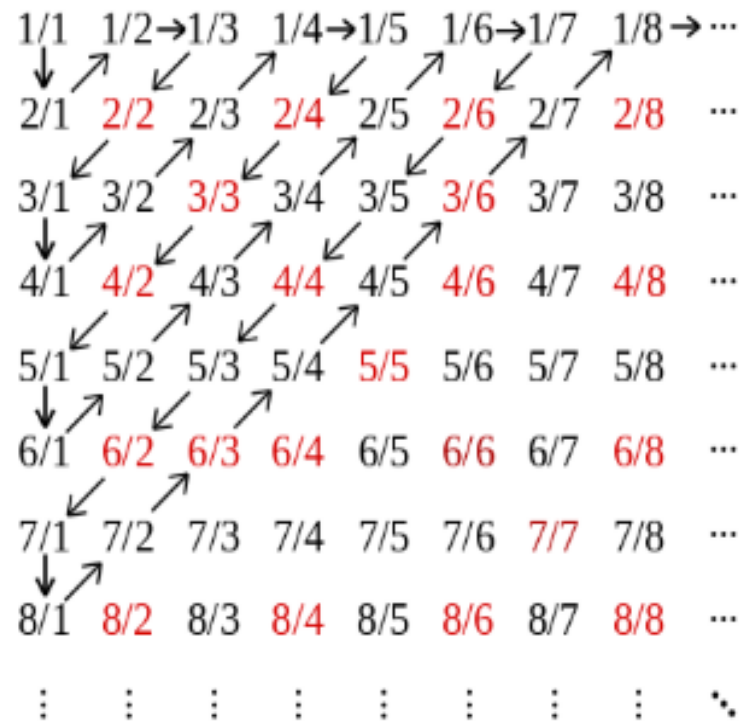
- Per quanto riguarda il continuo aritmetico della retta, a ciascun punto della retta può associare un unico reale (una precisa classe di equivalenza di successioni fondamentali). Per il viceversa vale a dire che ad ogni numero reale corrisponde ad un unico punto della retta, Cantor dice che **“fa parte della sua natura che non si possa dimostrare in generale”**, e assume la proprietà come **“assioma di continuità”** *“ad ogni numero corrisponde un unico punto sulla retta, di cui è l’ascissa”*.
- E proprio l’assioma di continuità dei numeri reali che alimenta in Cantor il desiderio di approfondire la natura del continuo, cioè capire la differenza tra la **forma “discreta”** e quella **“continua” di insiemi di punti**.

**Ma come spiegare questa differenza?**

- Cantor esprime per lettera a Dedekind l’idea che il problema si possa affrontare in **termini quantitativi, dimostrando che i reali erano “più” dei naturali, ovvero che erano ordini di infinito diversi**.

# Insiemi Numerabili

- Un insieme è **numerabile** quando può essere messo in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$ , il che significa che gli elementi dell'insieme possono essere elencati progressivamente (enumerati).
- L'insieme dei **numeri razionali** è numerabile, (**primo metodo diagonale di Cantor**)



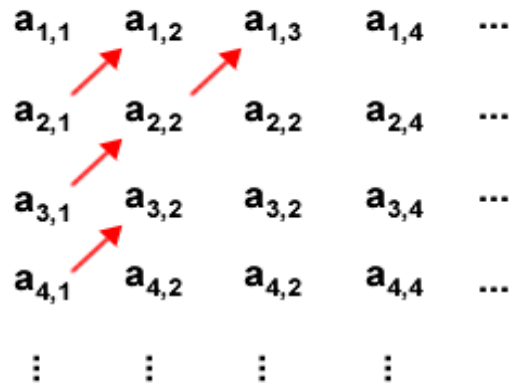
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \dots$$

La diagonale di indice  $j$  è l'insieme degli elementi  $a_{xy}$  tali che  $x + y = j + 1 : \{a_{j1}, a_{(j-1)2}, a_{(j-2)3} \dots\}$

$\forall a_{xy} \in UI_k = \mathbb{Q}$  esiste ed è unico  $j$  tale che  $j = x + y - 1$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(a_{xy}) = 1 + 2 + 3 + \dots + (j - 1) + y$$





- Nel 1874, Cantor dimostra (implicitamente) che l'insieme dei **numeri reali non è numerabile**, il che portava alla conclusione che **si potevano considerare almeno due ordini di infinità**.

*Su una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici (Über eine Eigenschaft des Inbegriffes alle reellen algebraischen Zahlen, Journal Crelle 1874)*

- Nel primo paragrafo Cantor mostra che i **numeri reali algebrici sono numerabili**

Vediamo come Cantor costruisce questa biiezione.

- Ad ogni numero algebrico  $\alpha$  si associa univocamente il polinomio  $f(x)$  di  $\mathbb{Z}[x]$  irriducibile, primitivo e con coefficiente di grado massimo positivo di cui  $\alpha$  è radice.
- Chiamiamo **altezza di  $\alpha$**  l'intero positivo dato dalla somma del grado di  $f(x)$  e dei valori assoluti dei suoi coefficienti.
- Dal momento che l'equazione  $f(x)=0$  di grado  $n$  può avere al massimo  $n$  radici distinte, avremo al massimo  $n$  numeri algebrici con la stessa altezza. **Dunque i reali algebrici si possono disporre in fila, prima secondo l'altezza e poi, a parità di altezza secondo l'ordine usuale di  $\mathbb{R}$ .**

□ Nel secondo paragrafo, il più rivoluzionario, Cantor **dimostrò che nessun insieme numerabile di reali  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  può riempire un intervallo  $(a, b)$  di  $\mathbb{R}$  con  $a < b$ .**

Quindi nessun intervallo, e meno che mai la retta reale, è formato solo da elementi algebrici, ma contiene una infinità di trascendenti.

□ La dimostrazione che  $\mathbb{R}$  non è numerabile verrà ripubblicata in un breve articolo del 1890, *Sopra una domanda elementare sulla molteplicità (Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre)* nel primo numero della rivista Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, organo della appena fondata Unione Matematica Tedesca, di cui Cantor viene eletto primo presidente. La nuova dimostrazione si basa sul famoso “metodo diagonale” da lui ideato, che gli aveva permesso di dimostrare qualche anno prima che l’insieme dei razionali è numerabile.

## □ L'intervallo $(0, 1)$ non è numerabile

Ogni numero reale di questo intervallo sarà della forma  $\alpha_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4} \dots$  (per avere un'unica rappresentazione si sostituiscono i numeri che hanno infinite cifre decimali uguale a zero, con la rappresentazione che prevede tutte cifre uguali a 9: esempio  $0,45=0,450000\dots=0,449999\dots$  o viceversa)

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che il nostro intervallo sia numerabile; ciò vuol dire che possiamo ordinare i suoi elementi in successione  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ . Disponiamo i numeri della successione nella tabella

$\alpha_1$	=	0,	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$	.....
$\alpha_2$	=	0,	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$a_{25}$	$a_{26}$	.....
$\alpha_3$	=	0,	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$a_{35}$	$a_{36}$	.....
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
$\alpha_n$	=	0,	$a_{n1}$	$a_{n2}$	$a_{n3}$	$a_{n4}$	....	$a_{nn}$	.....
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Costruiamo un numero reale

$\beta = 0, b_1b_2b_3b_4 \dots$  compreso fra 0 e 1 che non compaia in questa tabella, dove

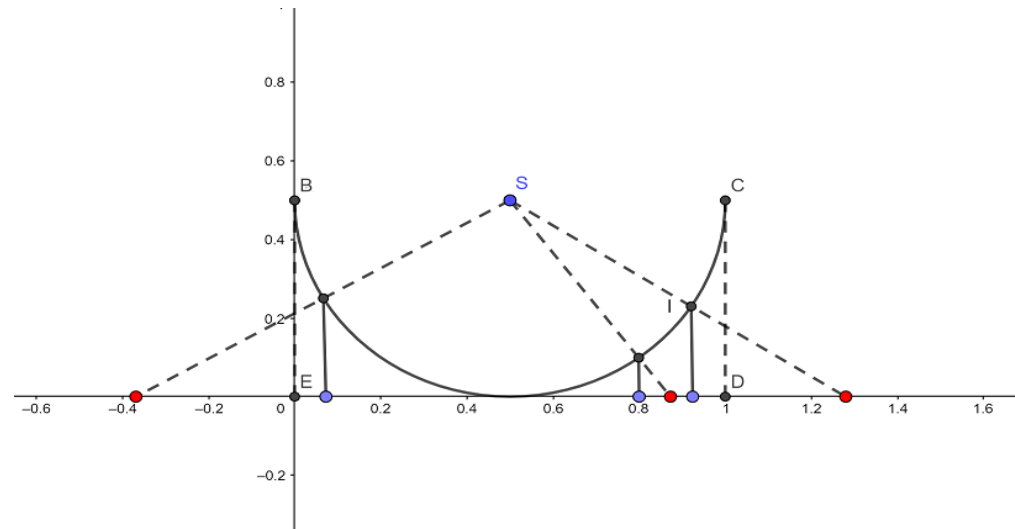
$$b_i = \begin{cases} 2 & \text{se } a_{ii} \neq 2 \\ 1 & \text{se } a_{ii} = 2 \end{cases}$$

□ L'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  non è numerabile

Prendiamo la semicirconferenza  $\mathcal{C}$  di centro  $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  e raggio  $r = \frac{1}{2}$  tangente all'asse delle ascisse.

Sia  $\varphi$  la proiezione ortogonale dell'intervallo  $(0,1)$  su  $\mathcal{C}$ , e sia  $\psi$  la proiezione di  $\mathcal{C}$  sull'asse delle ascisse dal punto  $S$ .

La composizione delle due applicazioni è la biiezione cercata



Nel articolo *Un contributo alla teoria della molteplicità (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* , J.reine und ang, Math.1878 che Cantor introduce il concetto di potenza di un insieme.

**□ Due insiemi hanno la stessa potenza, o lo stesso numero cardinale, se esiste tra essi una corrispondenza biunivoca.**

I numeri cardinali così definiti comprendono evidentemente gli usuali numeri naturali che risultano essere quei particolari numeri cardinali associati a insiemi finiti.

Abbiamo già due cardinali infiniti:  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$  ,  $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

Di seguito Cantor anche introduce una relazione d'ordine tra numeri cardinali:

**□ La potenza di un insieme M è minore di quella di N se M ha la stessa potenza di un sottoinsieme di N.**

**Quindi  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$**

Gli esempi che troviamo nel lavoro riguardano prima di tutto la potenza del numerabile, gli insiemi numerabili, che formano una classe incredibilmente estesa, infatti Cantor dimostra che

**□ Ogni sottoinsieme infinito dell'insieme dei numeri naturali è numerabile.**

**Gli insiemi numerabili sono quindi insiemi con la minima potenza infinita.**

*“Je le vois, mais je ne le crois pas”.*

- La maggior parte del lavoro di Cantor è dedicata al tipo di infinito di oggetti che hanno dimensioni diverse. Cantor ottiene risultati ancora più sorprendenti

□ **Spazi continui di dimensione  $n$  hanno la stessa potenza della retta reale.**

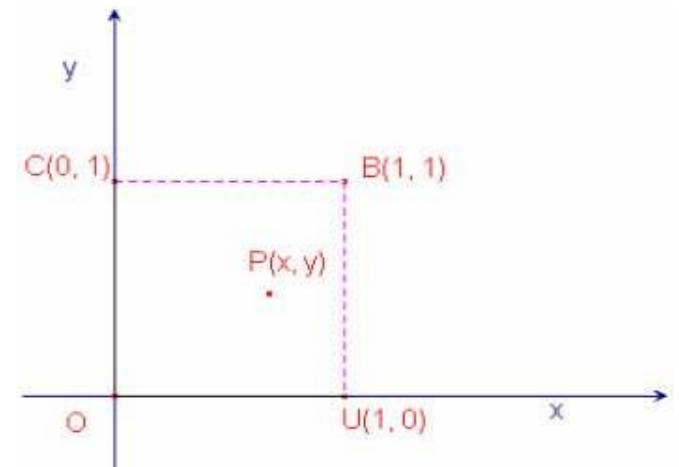
Cantor prova che il quadrato di lato unitario  $[0, 1]^2$  è in corrispondenza biunivoca col suo lato  $[0, 1]$ , quindi che  $\mathbb{R}^2$  ha la stessa potenza di  $\mathbb{R}$ .

Si tratta di definire una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento OU e tutti i punti del quadrato OUBC su di esso costruito. Le ascisse e le ordinate del punto  $P(a, b)$  del quadrato saranno del tipo  $a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$  e  $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$

A partire da queste coordinate posso costruire

un nuovo numero reale ponendo  $c = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 c_3 a_4 b_4 \dots$

- Chiaramente è possibile risalire da  $c$  univocamente a  $(a, b)$ .



- L'articolo del 1878 si conclude con una questione che impegnerà i matematici nei decenni successivi, nota come **Ipotesi del continuo: Cantor si convince così che non esiste tra numerabile e continuo una potenza intermedia.**

Se [...] per molteplicità *lineare* di numeri reali intendiamo [...] ogni concepibile pluralità di infiniti numeri reali distinti, si pone una questione: in *quante* e quali classi si dividono le molteplicità lineari, se si mettono in una stessa classe molteplicità di uguale potenza e in classi diverse molteplicità di potenze diverse? Con un procedimento induttivo che qui non descriveremo in dettaglio si arriva molto vicini a concludere che il numero delle classi di molteplicità lineari risultanti da questo principio di suddivisione è finito e uguale, per l'esattezza, a *due*<sup>21</sup>.

- Tutti i risultati ottenuti tra il 1874 e il 1878 vengono presentati organicamente per la prima volta tra il 1879 e il 1884 in una serie di 6 saggi dal titolo comune *Sulle molteplicità lineari infinite di punti, Über unendliche lineare punktmannigfaltigkeiten*. Che a detta di Zermelo contengono la “quintessenza” di tutta l’opera creativa di Cantor, ancora in modo applicato.
- Una sistemazione in teoria astratta, senza riferirsi più a insiemi particolari, finiti o infiniti di punti e numeri, ma facendo riferimento a insiemi qualsiasi; verrà data nei famosi *Contributi alla fondazione della teoria transfinita degli insiemi, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* 1895.



Vediamo come Cantor costruisce altri transfiniti

□ Dato un insieme  $M$ , e indicato con  $\mathcal{P}(M)$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $M$ , Cantor dimostra che

$$|\mathcal{P}(M)| = |2^M|$$

dove  $2^M = \{f: M \rightarrow \{0,1\}\}$ .

La corrispondenza biunivoca si costruisce facilmente associando ad ogni sottoinsieme  $Y \subseteq M$  la sua funzione caratteristica:

$$f_Y: M \rightarrow \{0,1\}$$
$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin Y \\ 1 & \text{se } x \in Y \end{cases}$$

□ Si ha quindi  $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|$

• Cantor dimostra che  $2^{\mathbb{N}}$  ha la stessa potenza dell'intervallo  $(0,1)$ , quindi di  $\mathbb{R}$

Rappresentando gli elementi dell'intervallo come  $0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$  dove lo sviluppo

decimale è espresso in base 2, come una successione di zero e uno, quindi come elemento di  $2^{\mathbb{N}}$ .

□ Nei *Beiträge* troviamo anche sviluppata tutta un'aritmetica

$$|M| + |N| = |M \cup N|$$

$$|M| \times |N| = |M \times N|$$

$|M|^{|N|}$  è il cardinale dell'insieme  $M^N = \{f: N \rightarrow M\}$

- Cantor indica il primo cardinale transfinito con  $\aleph_0$  ponendolo uguale per definizione al numero cardinale spettante all'insieme dei numeri naturali  $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ . Si verifica che:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

- Se con  $c = |\mathbb{R}|$  la potenza di numeri reali,  $c = 2^{\aleph_0}$ . Si ha

$$c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

- Cantor può costruire a partire da  $\aleph_0$  una successione infinita di cardinali, ognuno dei quali è maggiore del precedente

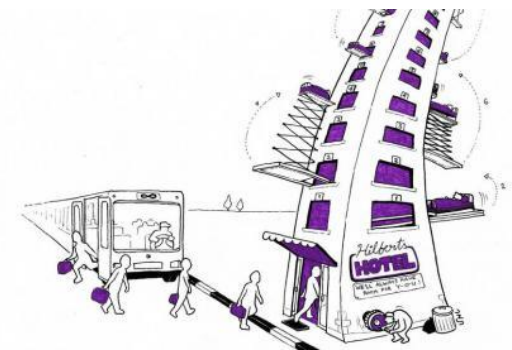
$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, 2^{2^{2^{\aleph_0}}} \dots$$

# L'ALBERGO DI HILBERT

- Abbiamo un albergo con infinite stanze singole, numerate con i numeri naturali da 1 in poi, tutte occupate da infinite clienti.

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	----	----
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	----	----

- 1) Alla reception si presenta un nuovo cliente  $b_1$  che chiede una stanza. Come può essere accontentato?
- 2) Le stanze dell'albergo sono sempre tutte occupate. E se arrivano 10 nuovi clienti? E se arrivano un numero finito di nuovi clienti? Possiamo sistemarli nel nostro albergo?
- 3) Le stanze dell'albergo sono sempre tutte occupate. Supponiamo ora che arrivi un pullman con infiniti nuovi clienti. Possiamo sistemarli nell'albergo?
- 4) Le stanze dell'albergo sono sempre tutte occupate. Arrivano infiniti pullman numerati 2, 3, 4, 5, .... ciascuno contenente infiniti nuovi clienti. Come possiamo alloggiarli?



## UN INFINITO TROPPO GRANDE

- Consideriamo di nuovo l'albergo di Hilbert con un numero infinito di stanze tutte occupate. Un fotografo, dotato di una macchina fotografica speciale in grado di scattare una quantità infinita di fotografie, fa una serie di foto in cui riprende tutti i possibili gruppi finiti o infiniti di clienti: scatta foto a ciascun cliente, a tutte le coppie di clienti, e in generale di tutti i gruppi finiti di clienti; non solo, ma il fotografo scatta una foto a ciascuno dei gruppi infiniti di clienti, per esempio il gruppo di clienti che occupano le stanze pari, o le stanze dispari, o le stanze il cui numero è un multiplo di 3, 5, o quelle aventi un numero primo. Completano l'insieme delle foto una in cui appaiono tutti gli infiniti clienti ospiti dell'albergo, e la foto del bellissimo panorama che si vede dalla terrazza dell'albergo.
- Il fotografo regala queste foto al direttore, che decide di appenderne una sola per stanza.
- Ma dopo aver fatto ciò .... il direttore ha ancora infinite foto ..... Perché?

Consideriamo l'insieme formato solo dagli *outsider*. Anche questo gruppo compare in una foto, perché sono stati fotografati tutti i possibili gruppi di clienti, e questa foto sarà appesa nella stanza H. Il cliente che occupa la stanza H non può essere un *insider*, perché in caso contrario apparirebbe nella foto appesa nella sua stanza, nella quale però ci sono gli *outsider*. D'altra parte, il cliente della stanza H non può essere un *outsider*, perché allora dovrebbe comparire nella foto e sarebbe un *insider*.