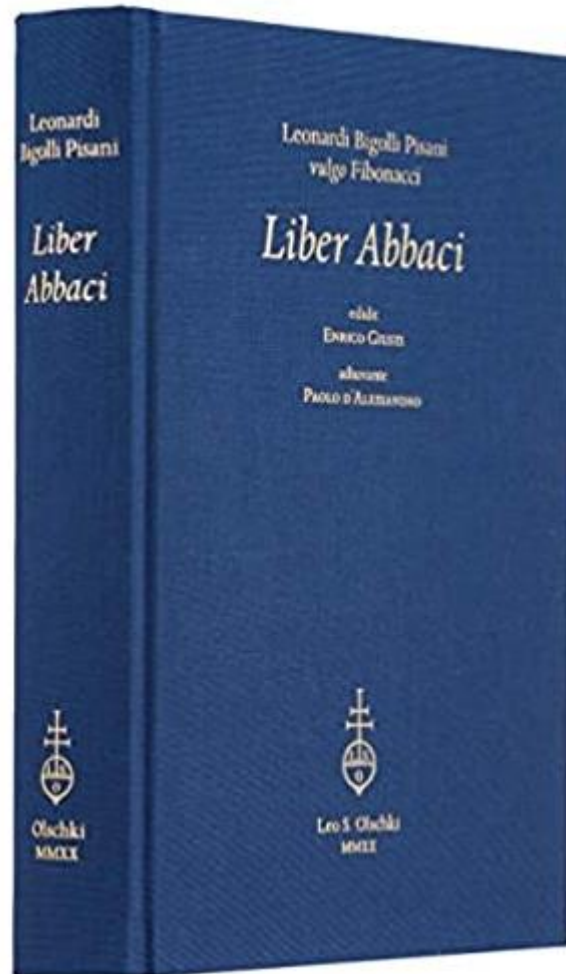


Problemi e metodi dal *Liber Abbaci*



Enrico Giusti

Ferrara (da remoto), 22 aprile 2022

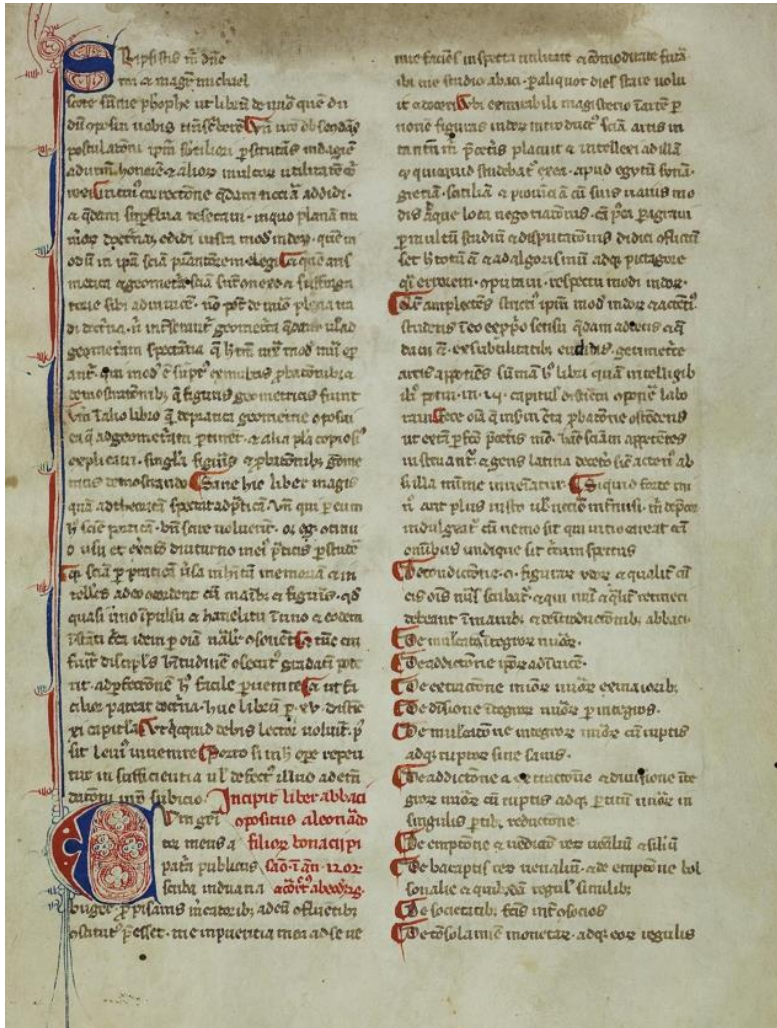


Il Liber Abbaci

composto nel 1202

rivisto verso il 1228.





I 15 capitoli del *Liber Abaci* si possono raggruppare in quattro grandi aree tematiche:

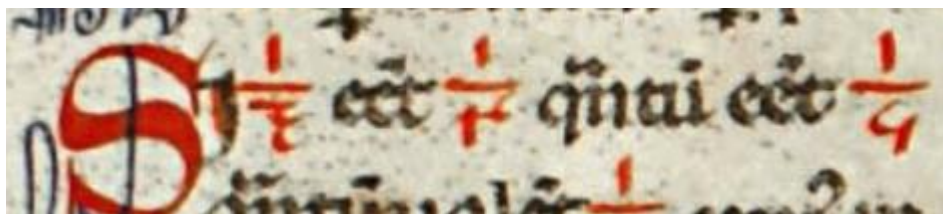
Il calcolo con i numeri indiani e le frazioni (cap. 1-7)

Le operazioni commerciali (cap. 8-11)

La matematica ricreativa (cap. 12)

La matematica superiore (cap. 13-15)





Se $\frac{1}{3}$ fosse $\frac{1}{4}$, quanto sarebbe $\frac{1}{5}$?

Se $\frac{1}{3}$ costasse $\frac{1}{4}$, quanto costerebbe $\frac{1}{5}$?



Hec q̄stio tal' ē. quat' si dicet'

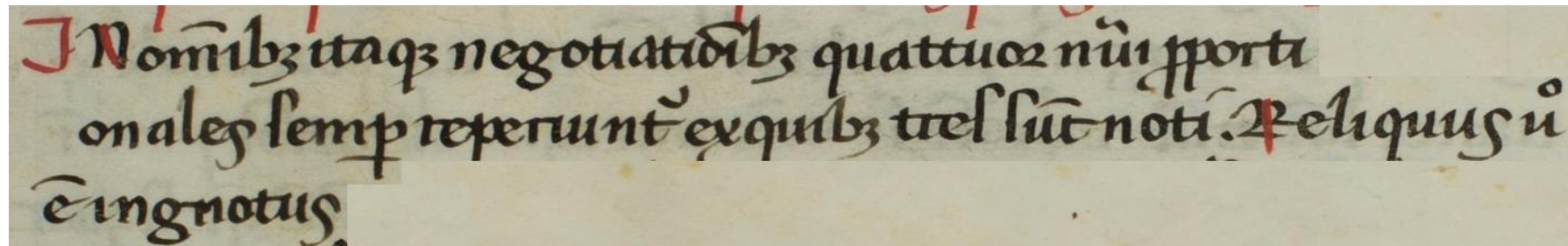
$\frac{1}{3}$ unū r. p' $\frac{1}{4}$ unū b. q̄ntūmalet $\frac{1}{5}$ unū r.

Questo problema è come se si dicesse:

$\frac{1}{3}$ di un rotulo per $\frac{1}{4}$ di un bizante;
quanto costa $\frac{1}{5}$ di un rotulo?



Questo problema si deve trattare al modo delle compravendite, come abbiamo insegnato nell'ottavo capitolo.

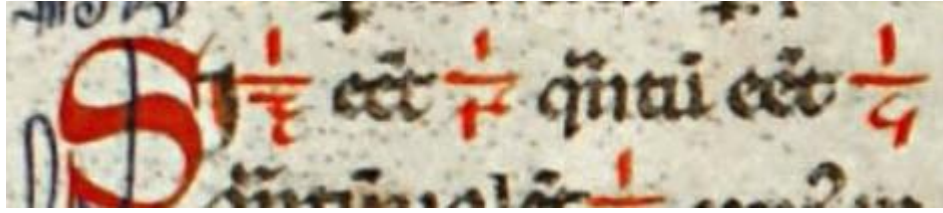


In omnibus itaque negotiis quatuor nunquam proportionales semper reperuntur ex quibus tres sunt notae. Reliquus uero est ignotus.

In tutte le compravendite ci sono quattro numeri proporzionali; tre dei quali sono noti, mentre il quarto è ignoto.

Il primo è la quantità della merce in vendita, ... il secondo è il prezzo di questa merce. Il terzo è un'altra quantità della stessa merce, di cui si cerca il prezzo, cioè il quarto numero.





Se $\frac{1}{3}$ fosse $\frac{1}{4}$, quanto sarebbe $\frac{1}{5}$?

Questo problema è come se si dicesse:

$\frac{1}{3}$ di un rotulo per $\frac{1}{4}$ di un bizante;
quanto ottengo per $\frac{1}{5}$ di un bizante?



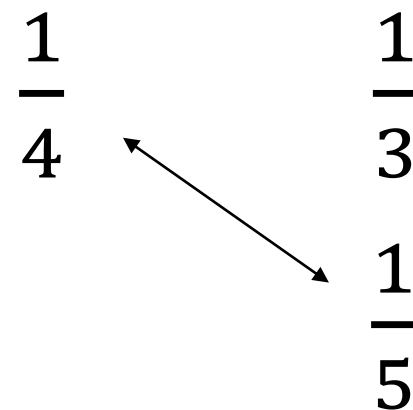
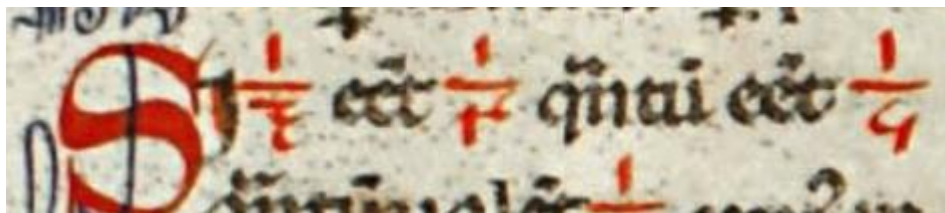
Nelle compravendite, come si è detto, ci sono quattro numeri proporzionali, cioè come il primo sta al secondo così il terzo sta al quarto. E quando quattro quantità sono proporzionali, il prodotto della seconda per la terza è uguale al prodotto della prima per la quarta. Pertanto se la quarta quantità è ignota, essa proviene dal prodotto della seconda quantità per la terza diviso per la prima. Allo stesso modo se si ignora la terza quantità, si deve dividere per la seconda il prodotto della prima per la quarta.



Questa è allora la regola generale. Si scriva a destra il primo numero, cioè la merce. Indietro sulla stessa linea si ponga poi il prezzo di questa merce, cioè il secondo numero. Quanto al terzo numero, se è una merce si scriva sotto la merce, cioè sotto il primo numero; e se è un prezzo si scriva sotto il prezzo, cioè sotto il secondo.

Ciò fatto, si moltiplichino i due numeri che risulteranno posti in diagonale e il risultato si divida per il terzo: quello che viene è il quarto numero ignoto.



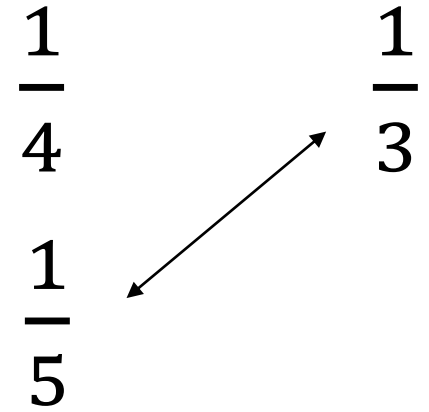
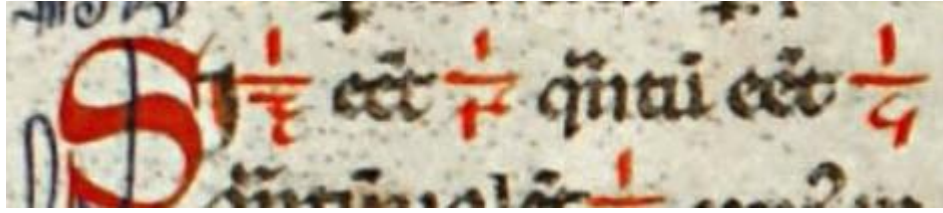


Se $\frac{1}{3}$ fosse $\frac{1}{4}$, quanto sarebbe $\frac{1}{5}$?

$\frac{1}{3}$ di un rotulo per $\frac{1}{4}$ di un bizante;

quanto costa $\frac{1}{5}$ di un rotulo?



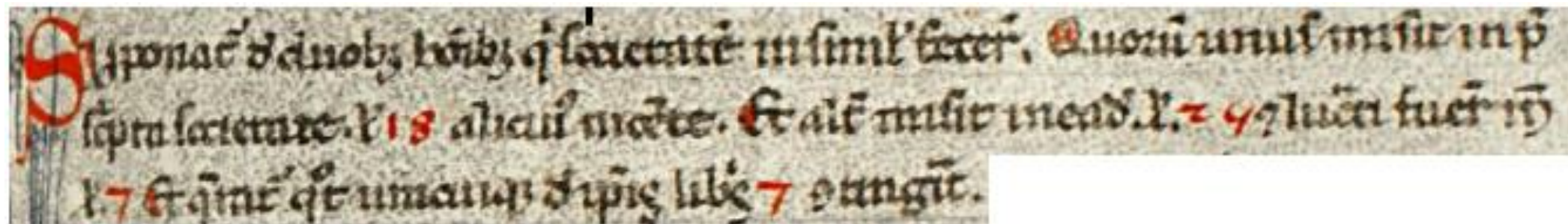


Se $\frac{1}{3}$ fosse $\frac{1}{4}$, quanto sarebbe $\frac{1}{5}$?

$\frac{1}{3}$ di un rotulo per $\frac{1}{4}$ di un bizante;
quanto ottengo per $\frac{1}{5}$ di un bizante?



Le società



Due uomini fecero una società, in cui uno mise 18 lire e l'altro 25 lire, e lucrarono 7 lire. Si chiede quanto di queste 7 lire spetti all'uno e quanto all'altro.

$$18+25=43$$

Se 43 mi dà 7, quanto mi darà 18?

$$\begin{array}{ccc} 43 & & 7 \\ & \nearrow & \\ 18 & & \end{array}$$



La coniazione delle monete

*Moneta glosari dī qm̄ ponit̄ in libra i libra ip̄ aliqua
data argenti quatitas. Et cū dicam̄ habeo nom̄ mon̄ adhuc quatitas
bet ut dicam̄ ad 2 intelligim̄ q̄ in lib̄ ip̄ius monete habeat̄ vnc
2 argenti.*

Si dice che si conia una moneta quando si pone in una libbra una certa quantità di argento. E quando ad esempio si dice: ho una moneta a 2, vuol dire che in una libbra di moneta ci sono 2 once di argento.

Il resto fino a 12 once (= 1 libbra) si mette di rame.



La coniazione delle monete

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow 10 \\ \searrow 35 \end{array}$$

Un tale ha 7 libbre di argento con le quali vuole coniare una moneta a 2 (cioè 2 onces di argento per libbra), e vuole sapere la quantità di moneta e quanto deve aggiungere di rame.

Poiché in una libbra di moneta ci devono essere 2 onces di argento, il resto, cioè 10 onces, deve essere di rame.

Per ogni 2 parti di argento ce ne sono 10 di rame.



I baratti e la proporzione composta

*brachia 20. pāni ualet lib. 3. pisanor. a 12. 92. cottonis ualet. 4. si
mili pisanor. Quere p brachus. 40. pāni quot. 12. quottonis habe bunt.*

20 braccia di panno valgono 3 lire pisane
e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire pisane.

Si chiede: quanti rotuli di cotone si
avranno per 50 braccia di panno?



I baratti e la proporzione composta

20 braccia di panno valgono 3 lire pisane.

42 rotuli di cotone valgono 5 lire pisane.

100 braccia di panno valgono 15 lire pisane.

126 rotuli di cotone valgono 15 lire pisane.

100 braccia di panno si scambiano con 126 rotuli di cotone.



I baratti e la proporzione composta

20 braccia di panno valgono 3 lire pisane e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire pisane.

Questo metodo proviene dalla proporzione della prima merce alla seconda, che è composta di due proporzioni, cioè di quella che ha la quantità della prima merce al suo prezzo e di quella del prezzo della seconda merce alla sua quantità. Nel problema specifico la proporzione delle braccia di panno ai rotuli di cotone si compone delle proporzioni di 20 a 3 e di 5 a 42.



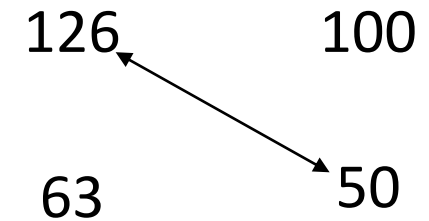
I baratti e la proporzione composta

20 braccia di panno valgono 3 lire pisane e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire pisane.

Ora come 20 sta a 3 così 5×20 sta a 5×3 (dico 5 perché 5 è il prezzo dei 42 rotuli); cioè 100 braccia valgono 15 lire. Inoltre come 5 sta a 42 così 3×5 sta a 3×42 . E poiché 100 braccia valgono 15 lire e per 15 lire si hanno 126 rotuli, dunque per 100 braccia si hanno 126 rotuli, e pertanto la proporzione della prima merce alla seconda è composta delle due proporzioni dette.



I baratti e la proporzione composta

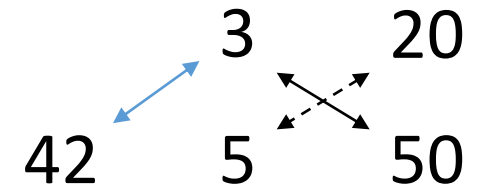


100 braccia di panno si scambiano con 126 rotuli di cotone.

Si chiede: quanti rotuli di cotone si scambieranno con 50 braccia di panno ?



I baratti e la proporzione composta



Si scriva una di queste merci in cima alla tavola e a sinistra sulla stessa linea il suo prezzo.

Poi sotto il prezzo della prima merce si scriva il prezzo della seconda e a sinistra sulla stessa linea la quantità della seconda merce.

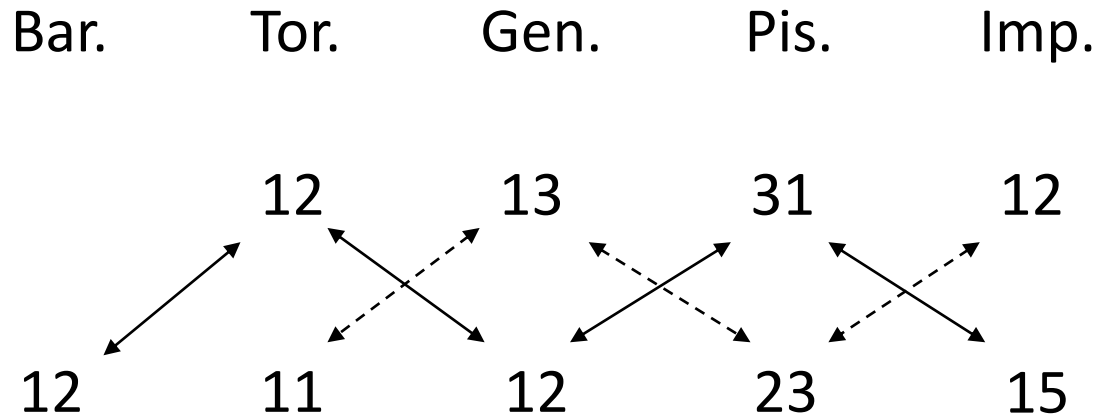
Si scriva poi la quantità della merce che si vuole barattare sotto la merce dello stesso tipo.

Si moltiplichino ora l'ultimo numero scritto per il prezzo opposto diagonalmente e poi per l'altro numero sempre in diagonale, e si divida il risultato per il prodotto degli altri due numeri; e così si ottiene quanto si cerca.



I cambi

12 denari imperiali valgono 31 pisanini, 23 pisanini valgono 12 genovini, 13 genovini valgono 12 tornesi e 11 tornesi valgono 12 barcellonesi. Quanti barcellonesi si cambiano con 15 imperiali?



La falsa posizione



C'è un albero di cui $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ stanno sotto terra, e sono 21 palmi.

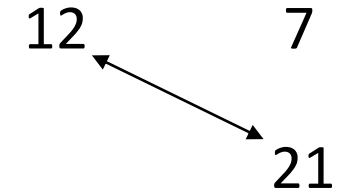
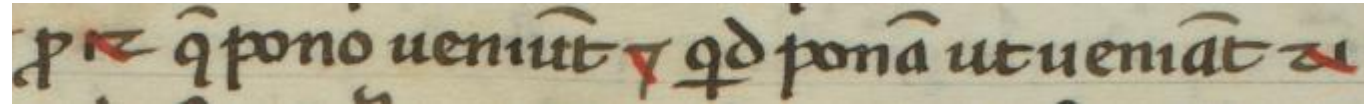
Si chiede quanto sia la lunghezza di quell'albero.

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 21$$

$$\frac{7}{12}x = 21$$



La falsa posizione



Poniamo che la lunghezza sia 12, e calcoliamo $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ di 12. Viene 7.

Allora diciamo: per 12 che ho posto viene 7; quanto devo porre perché venga 21?



Elchataym, ovvero la doppia falsa posizione

Il perimetro di un rettangolo è 8 e il lato maggiore supera di 1 il minore.
Si chiedono i lati.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$4x + 2 = 8$$

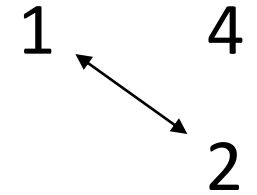
$$x = 1 \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \frac{1}{2}$$



Elchataym, ovvero la doppia falsa posizione

Il perimetro di un rettangolo è 8 e il lato maggiore supera di 1 il minore. Si chiedono i lati.



Supponiamo (prima falsa posizione) che il lato minore sia 3; allora il maggiore è 4 e il perimetro è 14, che sono 6 più del dovuto.

Supponiamo ora (seconda falsa posizione) che il lato minore sia 2; allora il maggiore è 3 e il perimetro è 10, che sono 2 più del dovuto.

Diciamo allora: per uno che sono sceso mi sono avvicinato alla verità di 4. Quanto dovrò scendere ancora per avvicinarmi di altri 2?



La doppia falsa posizione

Due uomini avevano denari, e il primo disse al secondo; se mi dai un terzo dei tuoi denari ne avrò 14. Al che il secondo rispose: e se tu me ne dai un quarto dei tuoi ne avrò 17. Si chiede quanto aveva ognuno.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = 14 \\ \frac{1}{4}x + y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 42 \\ \frac{1}{4}x + y = 17 \end{cases}$$

$$\frac{11}{4}x = 25$$

$$x = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$$

$$y = 17 - \frac{25}{11} = 14\frac{8}{11}$$



La doppia falsa posizione

Due uomini avevano denari, e il primo disse al secondo; se mi dai un terzo dei tuoi denari ne avrò 14. Al che il secondo rispose: e se tu me ne dai un quarto dei tuoi ne avrò 17. Si chiede quanto aveva ognuno.

Poniamo che il primo abbia 4 denari. Per arrivare a 14 il secondo ne deve dare 10, quindi il secondo ne ha 30. Questi 30 più la quarta parte del primo fanno 31, che dovrebbero essere 17. Dunque la prima posizione mi dà 14 di troppo.

Poniamo ora che il primo abbia 8 denari. Per arrivare a 14 il secondo ne deve dare 6, quindi il secondo ne ha 18. Questi 18 più la quarta parte del primo fanno 20, che dovrebbero essere 17. Dunque la seconda posizione mi dà 3 di troppo.

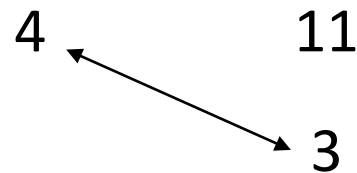


La doppia falsa posizione

Due uomini avevano denari, e il primo disse al secondo; se mi dai un terzo dei tuoi denari ne avrò 14. Al che il secondo rispose: e se tu me ne dai un quarto dei tuoi ne avrò 17. Si chiede quanto aveva ognuno.

4 31
8 20
17

Crescendo di 4 i denari del primo mi sono avvicinato di 11. Quanto devo crescere ancora per avvicinarmi di altri 3?



$$\frac{4 \times 3}{11} = 1 \frac{1}{11}$$



La doppia falsa posizione

de homine qui negotiatus lucā

Di un uomo che è andato a Lucca per affari

Un tale andò per affari a Lucca, poi a Firenze e infine tornò a Pisa; in ogni città raddoppiò quanto aveva e spese 12 denari e alla fine restò senza un quattrino. Si chiede quanto aveva all'inizio.

inizio	dopo Lucca	dopo Firenze	a Pisa
x	$2x - 12$	$2(2x - 12) - 12$	$2(4x - 36) - 12$
		$4x - 36$	$8x - 84$

$$8x - 84 = 0$$

$$x = 10\frac{1}{2}$$



La doppia falsa posizione

de homine quiit negotiāto lucā

Di un uomo che è andato a Lucca per affari

Supponiamo che all'inizio avesse 12 denari. Allora

inizio	dopo Lucca	dopo Firenze	a Pisa	
12	12	12	12	12 di troppo

Supponiamo che all'inizio ne avesse 11. Allora

inizio	dopo Lucca	dopo Firenze	a Pisa	
11	10	8	4	4 di troppo



La doppia falsa posizione

de homine quiit negotiāto lucā

Di un uomo che è andato a Lucca per affari

12

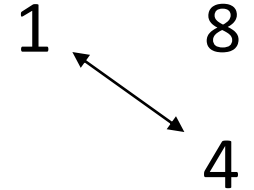
12

Diciamo allora: per un denaro che ho diminuito mi sono avvicinato alla verità di 8. Quanto devo diminuire ancora per avvicinarmi di altri 4?

11

4

0



La doppia falsa posizione

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & \gamma_1 \\ x_2 & y_2 & \gamma_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ Ax + By + Cz = D \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} x_1 & \begin{cases} by + cz = d - ax_1 \\ \beta y + \gamma z = \delta - \alpha x_1 \end{cases} & y_1 & z_1 & D_1 \\ x_2 & \begin{cases} by + cz = d - ax_2 \\ \beta y + \gamma z = \delta - \alpha x_2 \end{cases} & y_2 & z_2 & D_2 \end{array}$$

