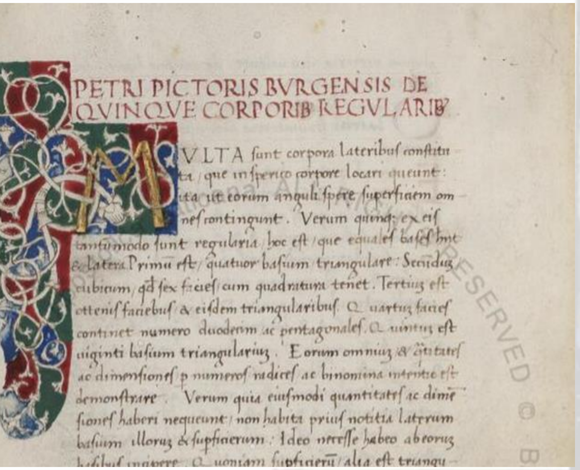
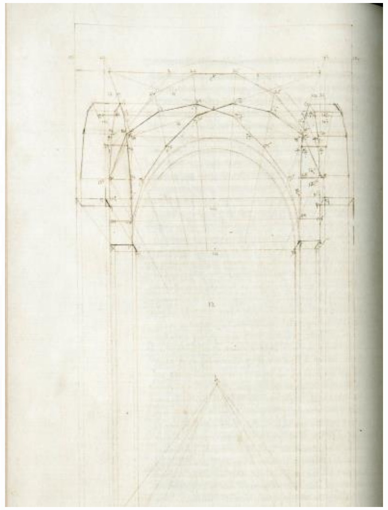
Tra matematica dell'abaco e tradizione archimedea:

Piero della Francesca e il volume della volta



PETRI PICTORIS BVRGENSIS DE QVINQVE CORPORIB REGVLARIB

MVLTA sunt corpora lateribus constituta, que in sperico corpore locari queunt: ita ut eorum anguli spere superficiem omnes contingunt. Verum quinque ex eis tantummodo sunt regularia, hoc est, que equales bases hnt & latera. Primu est, quatuor basium triangulare: Secundu cubicum, qd sex facies cum quadratum tenet. Tertiu est octenis faciebus & eisdem triangularibus. Quartu facies continet numero duodecim ac pentagonales. Quintu est viginti basium triangularium. Eorum omnium & quantitates ac dimensiones p numeros radices ac binomina intentio est demonstrare. Verum quia eiusmodi quantitates ac dimensiones haberi nequeunt, non habita prius notitia laterum basium illoru & superficierum: Ideo necesse habeo ab eoru basibus incipere. Quoniam superficieru alia est triangu-



Veronica Gavagna (veronica.gavagna@unifi.it)
Università di Firenze, Dipartimento di Matematica e Informatica

Aspetti caratterizzanti dell'attività proposta

- Rapporti tra matematica, arte e architettura (esempio di «saper vedere in matematica»)
- Uso diretto di fonti primarie (in latino o in volgare) disponibili gratuitamente
- Analisi linguistica delle fonti
- Uso di ambienti di geometria dinamica in 3D per la visualizzazione e l'esplorazione di oggetti matematici

La matematica di Piero della Francesca

di Enrico Gamba
Vico Montebelli
Pierluigi Piccinetti

Articolo a cui mi sono ispirata per la parte più tecnica

Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) La matematica di Piero della Francesca, *Lettera matematica Pristem*, 59, 49-59

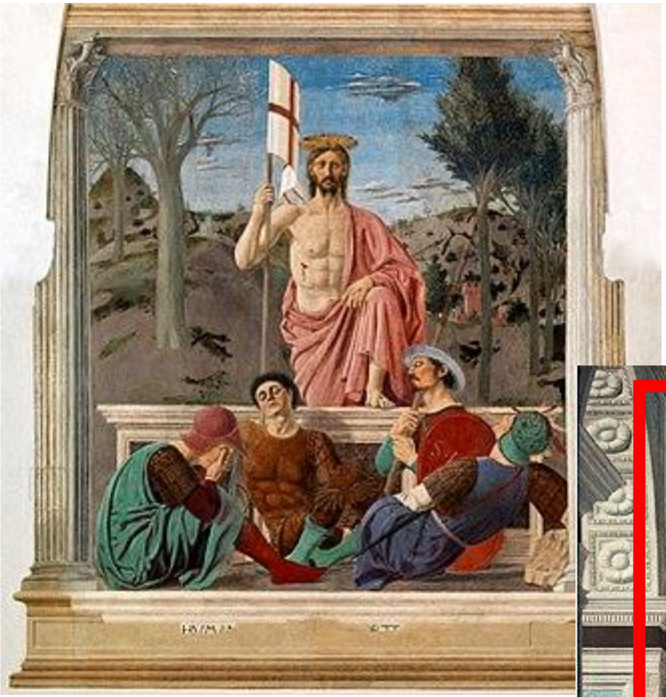
https://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/wp-content/uploads/2017/02/LM59_09.pdf

Piero della Francesca (Borgo San Sepolcro circa 1412 – ivi 1492)

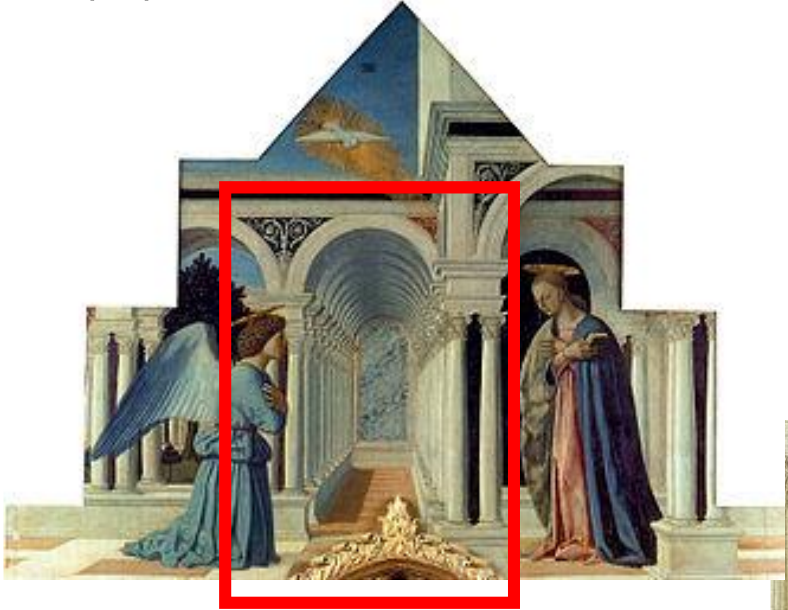
«La sua attività può senz'altro essere caratterizzata come un processo che va dalla pratica pittorica, alla matematica e alla speculazione matematica astratta»

(https://www.imss.fi.it/milleanni/cronologia/biografie/pifranc.html)

Autoritratto

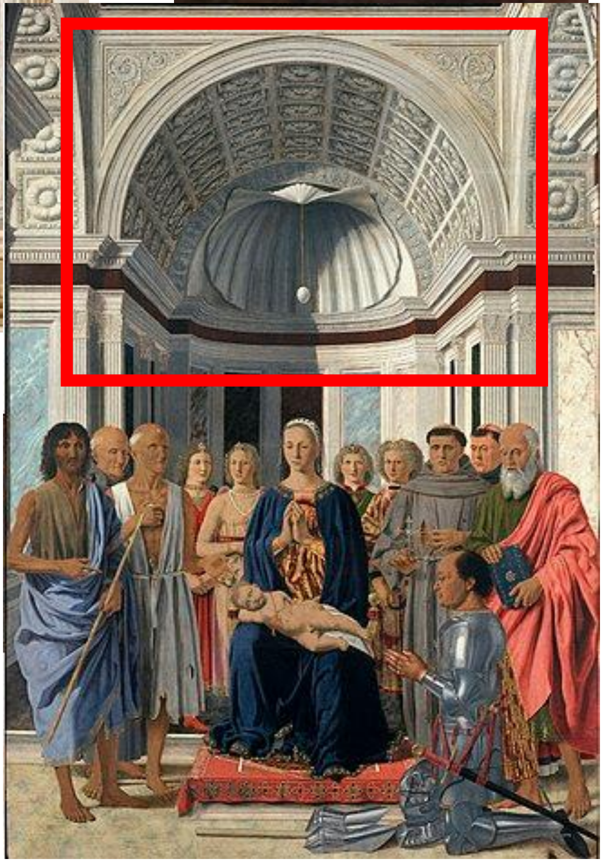


La Resurrezione



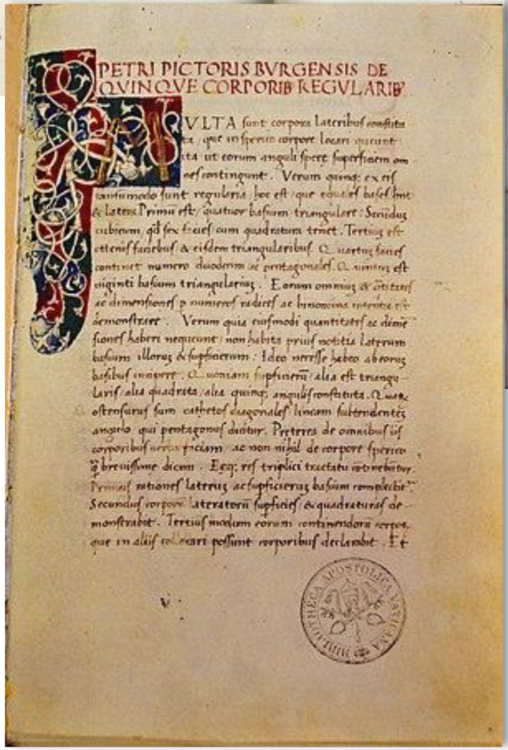
Polittico di Sant'Antonio

La flagellazione



La pala Montefeltro

- *Trattato d'abaco*
- *De prospectiva pingendi*
- ***Libellus de quinque corporibus regularibus***
- ***Edizione del*** **corpus** ***archimedeo***



Perché, dal punto di vista dello storico della matematica, è molto importante l'interesse di un personaggio come Piero della Francesca verso il *corpus* archimedeo?

Che cos'è la matematica dell'abaco?

È un tipo di matematica pratica che comincia ad affermarsi nella prima metà del Duecento con la diffusione dell'opera di Leonardo Pisano ed è espressione del cosiddetto «strato culturale intermedio» (C. Maccagni).

conoscenza del **latino**

↑

Strato culturale intermedio

pratici*:* mercanti, artigiani, **artisti**, architetti, maestri d'abaco, ingegneri, idraulici, agrimensori, cartografi, meccanici, costruttori di strumenti scientifici, chirurghi, speziali, maestri d'artiglieria

↓

capacità di **leggere e scrivere in volgare** (mercantesca)

I temi tipici della matematica mercantile sono: calcolo di interessi e sconti, baratti, conversione di unità di misura, compagnie etc A questi si aggiungono gli argomenti di geometria pratica in gran parte legati al calcolo di aree e volumi.

I trattati d’abaco che sono sopravvissuti sono circa trecento e sono conservati per lo più nelle biblioteche di Firenze, Siena e Pisa.

I trattati d’abaco non sono libri di testo per gli studenti ma, con ogni probabilità, repertori di casi per i maestri d’abaco e per i clienti della bottega.
Si tratta infatti **di raccolte di problemi risolti**, raggruppati per temi, in cui il problema ha la funzione di “exemplum”.
L’approccio è di tipo analogico e induttivo: si parte da un caso o da un gruppo di casi particolari che fungono da paradigma di un caso più generale.

Non ci sono argomentazioni astratte ma sempre basate su esempi numerici.

Le scuole d’abaco promuovono la diffusione della matematica e alzano il livello di alfabetizzazione matematica in diversi strati sociali, creando anche diverse aspettative nei confronti della disciplina e contribuiscono a creare un clima culturale favorevole alla ricezione dei classici greci che partecipano di quel fenomeno culturale che va sotto il nome di **Umanesimo (matematico)**.

L’opera di Archimede è particolarmente ostica: intere parti di dimostrazioni sono lasciate al lettore ed è necessario avere molti strumenti matematici (per esempio la teoria delle coniche) per comprendere queste dimostrazioni.
Si richiede un tremendo sforzo intellettuale e questo è uno dei motivi per i quali la traduzione medievale di Guglielmo di Moerbeke di due codici greci contenenti opere di Archimede, eseguita alla corte papale di Viterbo attorno alla metà del Duecento, non conosce quasi diffusione.

La *Practica geometriae* di Leonardo Pisano è uno dei più importanti tramiti della diffusione delle conoscenze archimedee **nel mondo della cultura dell’abaco**, sostanzialmente limitate alla *Misura del cerchio* e alla *Sfera e il cilindro*. La fonte fondamentale di Leonardo non è tuttavia una fonte diretta, ovvero gli scritti di Archimede, ma la tradizione indiretta dei *Verba filiorum*.

La conoscenza dell’opera archimedea si limita tuttavia all’uso dei risultati relativi al cerchio e alla sfera.

Perché, dal punto di vista dello storico della matematica, è molto importante l'interesse di un personaggio come Piero della Francesca verso il *corpus* archimedeo nel suo complesso?

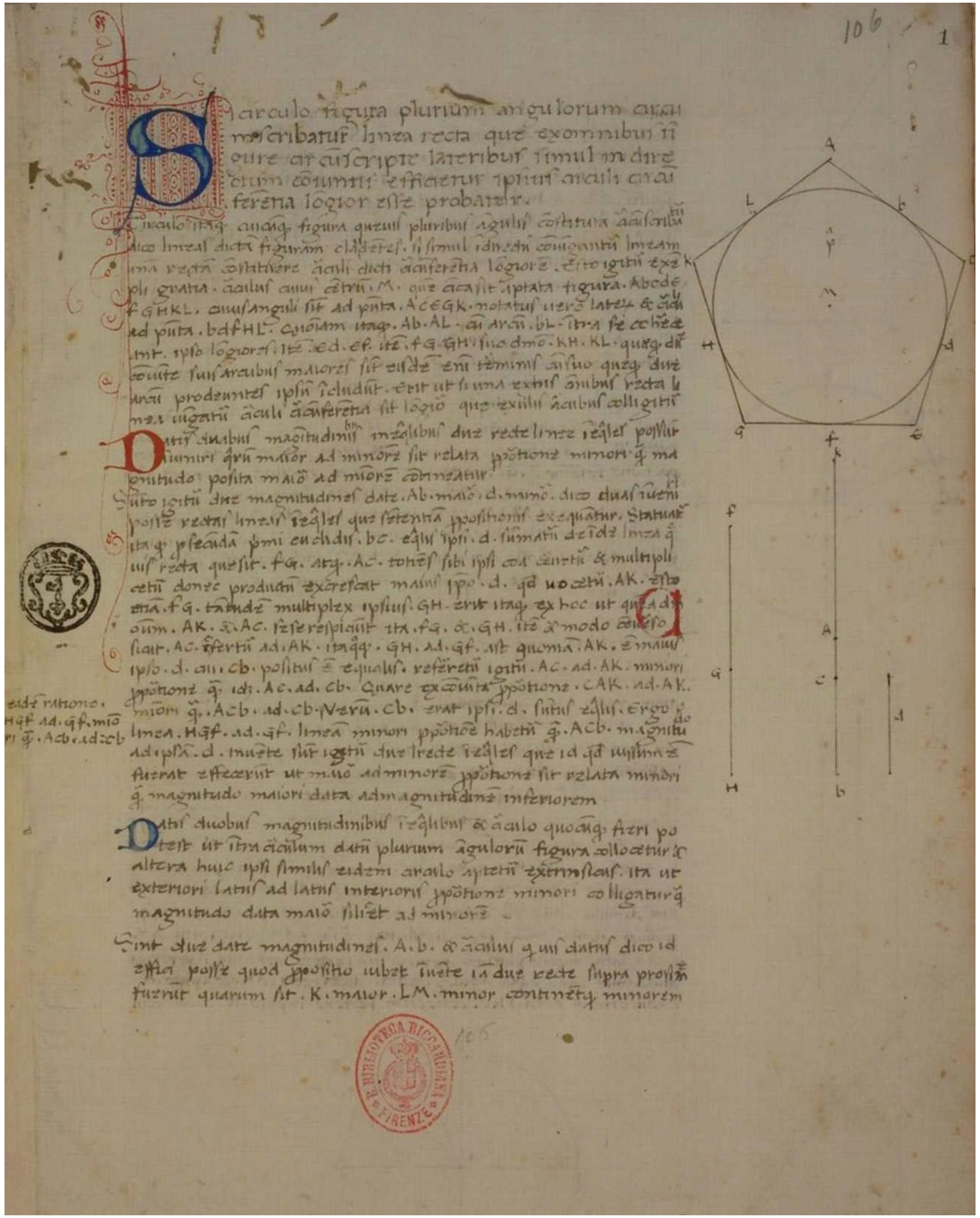
Piero testimonia una significativa interazione tra cultura abachistica e umanesimo matematico

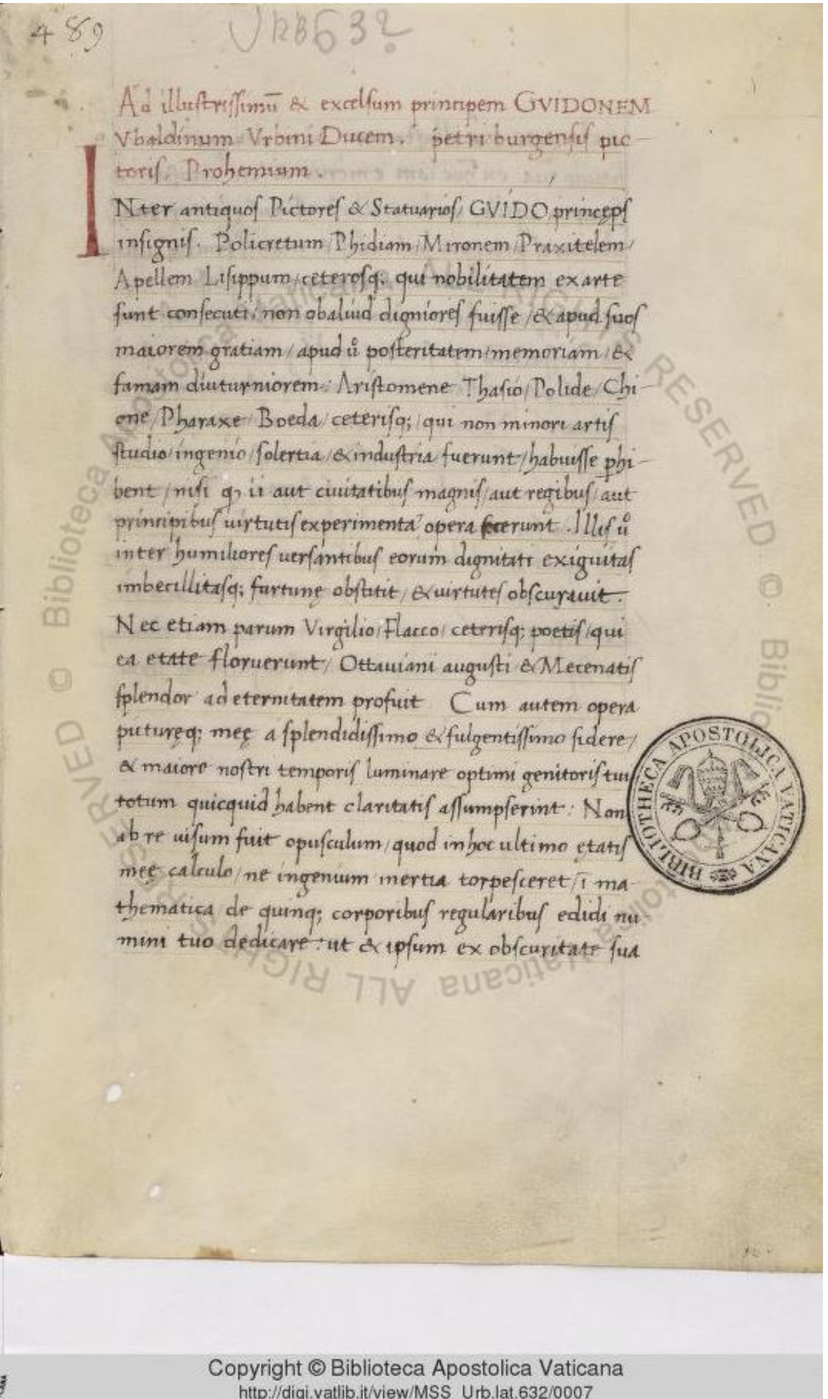
Il caso di cui si parla ha anche una peculiarità: come Piero, anche Archimede aveva determinato il volume della volta, ma in un trattato che è stato ritrovato agli inizi del XX secolo

Ci sono pervenuti due codici “archimedei” di Piero della Francesca:

- **Codice 106** della Biblioteca Riccardiana di Firenze: è la copia manoscritta del *corpus* archimedeo esemplata sulla base del codice greco tradotto in latino da Iacopo di San Cassiano nella prima metà del Quattrocento (*Sulla sfera e il cilindro*, *Misura del cerchio*, *Conoidi e sferoidi*, *Equilibrio dei piani*, *Quadratura della parabola*, *Arenario*)

Copia digitale:
https://www.loc.gov/item/2021667866/



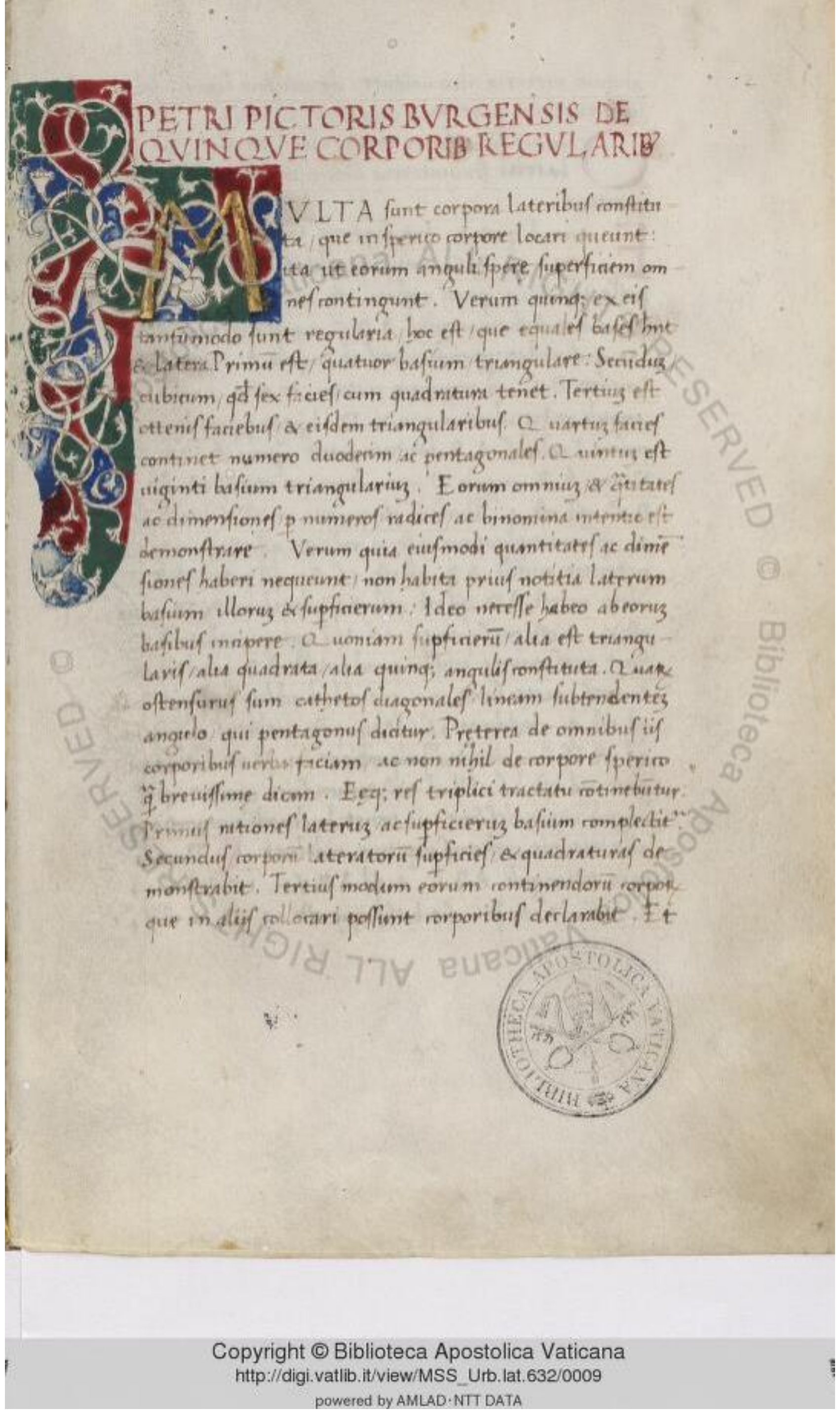


Ad illustrissimum & excelsum principem GVIDONEM Vbaldinum Vrbini Ducem. petri burgensis pictoris. Prohemium.

INter antiquos Pictores & Statuarios GVIDO princeps insignis. Policretum Phidiam Mironem Praxitelem Apellem Lisippum ceterosque qui nobilitatem ex arte sunt consecuti non ob aliud digniores fuisse & apud suos maiorem gratiam apud uero posteritatem memoriam & famam diuturniorem: Aristomene Thasio Polide Chione Pharaxe Boeda ceterisque qui non minori artis studio ingenio solertia & industria fuerunt habuisse phibent nisi quia ii aut ciuitatibus magnis aut regibus aut principibus uirtutis experimenta opera fecerunt. Illos uero inter humiliores uersantibus eorum dignitati exiguitas imbecillitasque fortune obstitit & uirtutes obscurauit. Nec etiam parum Virgilio Flacco ceterisque poetis qui ea etate floruerunt Ottauiani augusti & Mecenatis splendor ad eternitatem profuit. Cum autem opera picturęque meę a splendidissimo & fulgentissimo sidere & maiore nostri temporis luminare optimi genitoris tui totum quicquid habent claritatis assumpserint. Non ab re uisum fuit opusculum quod in hoc ultimo etatis mee calculo ne ingenium inertia torpesceret in mathematica de quinque corporibus regularibus edidi numini tuo dedicare: ut & ipsum ex obscuritate sua

Vat. Urb. Lat. 632 della Biblioteca Vaticana di Roma: copia manoscritta del *Libellus de quinque corporibus regularibus*

https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632



PETRI PICTORIS BVRGENSIS DE QVINQVE CORPORIB REGVLARIB

MVLTA sunt corpora lateribus constituta que in sperico corpore locari queunt: ita ut eorum anguli spere superficiem contingunt. Verum quinque ex eis tantummodo sunt regularia hoc est que equales bases hnt & latera. Primum est quatuor basium triangulare. Secundum cubicum, quod sex facies cum quadratum tenet. Tertium est octonis faciebus & eisdem triangularibus. Quartum facies continet numero duodecim ac pentagonales. Quintum est uiginti basium triangularium. Eorum omnium & quantitates ac dimensiones per numeros radices ac binomina intentio est demonstrare. Verum quia eiusmodi quantitates ac dimensiones haberi nequeunt non habita prius notitia laterum basium illorum & superficierum: Ideo necesse habeo ab eorum basibus incipere. Quoniam superficierum alia est triangularis alia quadrata alia quinque angulis constituta. Quarum ostensurus sum cathetos diagonales lineam subtendentes angulo qui pentagonus dicitur. Preterea de omnibus iis corporibus uerba faciam ac non nihil de corpore sperico quam breuissime dicam. Eaque res triplici tractatu continebitur. Primus rationes laterum ac superficierum basium complectitur. Secundus corporum lateratorum superficies & quadraturas demonstrabit. Tertius modum eorum continendorum corporum que in aliis collocari possunt corporibus declarabit. Et

Il codice Vat. Urb. 632 è scritto da due mani molto simili in umanistica corsiva.
La mano di Piero interviene per correggere, aggiungere etc e per fare i disegni. Le figure geometriche di mano di Piero sono state disegnate prevalentemente nel margine inferiore dei fogli, più raramente nel margine destro.
Probabilmente molte figure sono state disegnate prima della redazione del testo (forse il copista aveva come modello un altro trattato e ne seguiva l'impaginazione).

La redazione di questo codice si potrebbe far risalire alla fine degli anni Settanta o ai primi anni Ottanta del Quattrocento.

Omaggio di Piero al duca appena insediato, il manoscritto rimase a Urbino finché la biblioteca ducale viene trasferita alla Vaticana nel 1657 al tempo di Alessandro VII (Fabio Chigi).

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus, corredato della versione volgare di Luca Pacioli*, Edizione Nazionale degli scritti di Piero della Francesca, Giunti 1995, vol. I *Testi e note* (testo critico Enrico Gamba e Vico Montebelli)

Facsimile del codice Vaticano Urbinate Latino 632 (176 pagine, in un formato 14,5 x 21,5) Edizione critica del testo corredato della versione volgare di Luca Pacioli (XLIV-216, in un formato 23 x 32,5) Edizione critica dei disegni (XXII-224 pagine, in un formato 23 x 32,5). L'edizione in facsimile è in 998 copie numerate.

Sebbene il *Libellus* sia descritto nella dedicatoria come articolato in tre trattati, in realtà essi sono quattro:

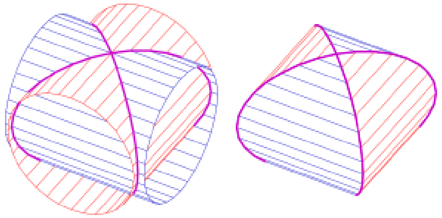
Primo Trattato: 57 problemi di geometria piana riguardanti triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni, ottagoni regolari e circonferenze;

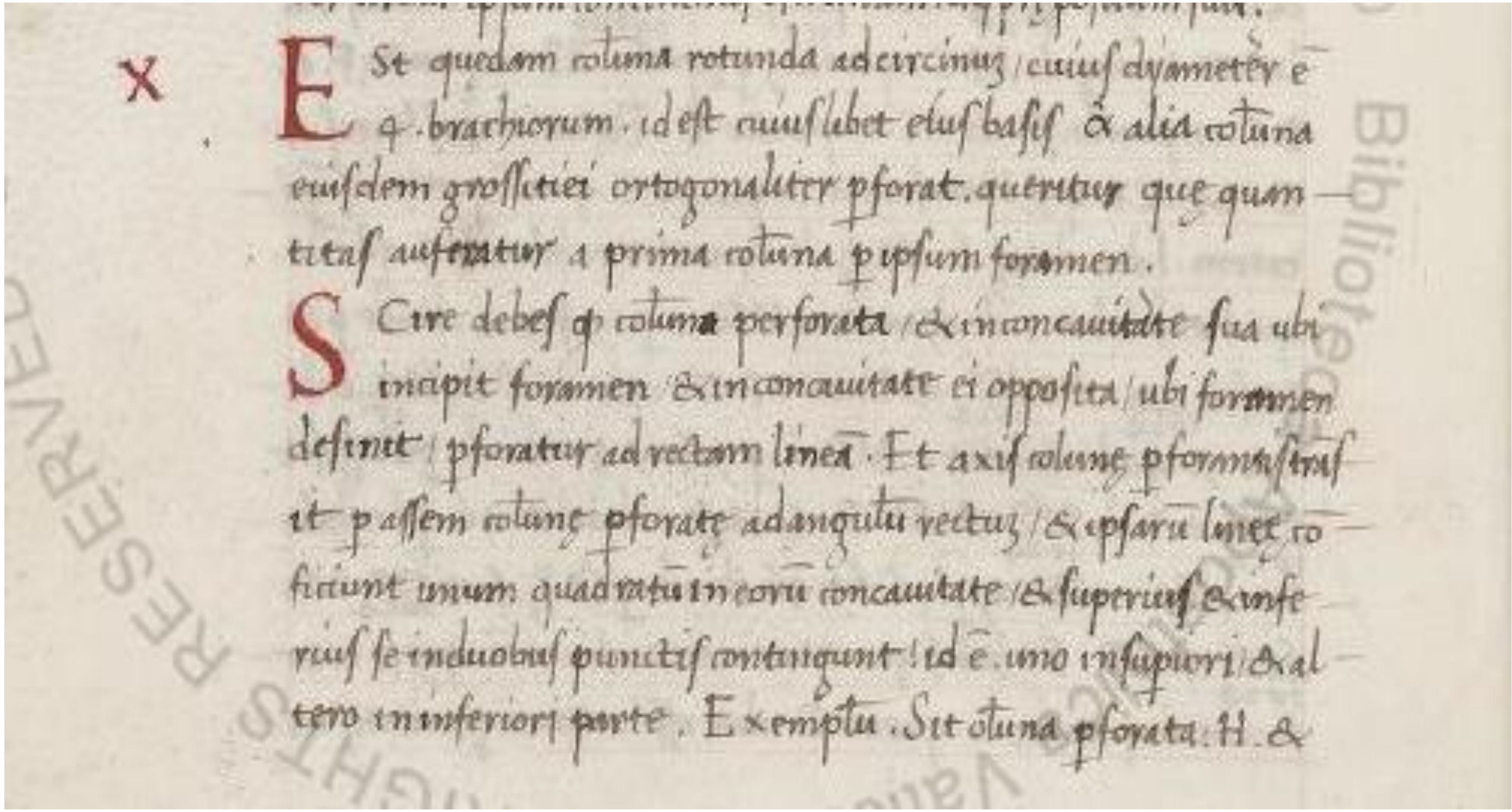
Secondo Trattato: 36 problemi sui poliedri regolari (del tipo: dato lo spigolo di un poliedro regolare, se ne determinino superficie e volume, oltre che il diametro della sfera circoscritta)

Terzo Trattato: 29 problemi, di cui 17 sui poliedri (del tipo: determinare il lato di un poliedro inscritto in un poliedro di lato noto)

Quarto Trattato: 18 problemi sui poliedri archimedei, ma anche il calcolo del volume e della superficie della volta (Caso 10)

Volte del portico del Palazzo Ducale di Urbino





Casus X

Est quaedam **columna rotunda** ad circinum, cuius dyameter est 4 brachiorum, id est cuiuslibet eius basis et alia columna eiusdem grossitiei ortogonaliter perforat. Quaeritur quae quantitas auferatur a prima columna per ipsum foramen.

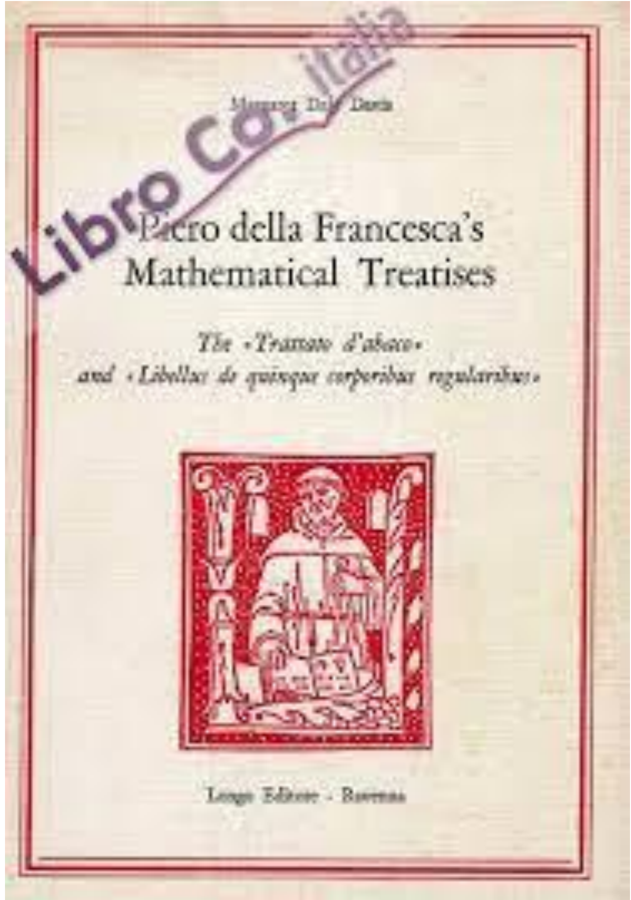
Scire debes quod columna perforata et in concavitate sua ubi incipit foramen et in concavitate ei opposita ubi foramen desinit perforatur ad rectam lineam, et axis columnae perforantis transit per assem columnae perforatae ad angulum rectum et ipsarum lineae conficiunt unum quadratum in eorum concavitate et superius et inferius se in duobus punctis contingunt, idest uno in superiori et altero in inferiori parte…

Nella dedicatoria Piero afferma di aver scritto il *Libellus* negli anni della vecchiaia per mantenere attivo il cervello (si legge nella dedicatoria: "in hoc ultimo aetatis meae calculo ne ingenium inertia torpesceret").

In qualche caso i problemi del *Libellus* sono letteralmente la traduzione latina di problemi scritti in volgare nel *Trattato d'abaco*; in altri casi Piero trae problemi dal *Libellus* ma li rivede e li riformula.

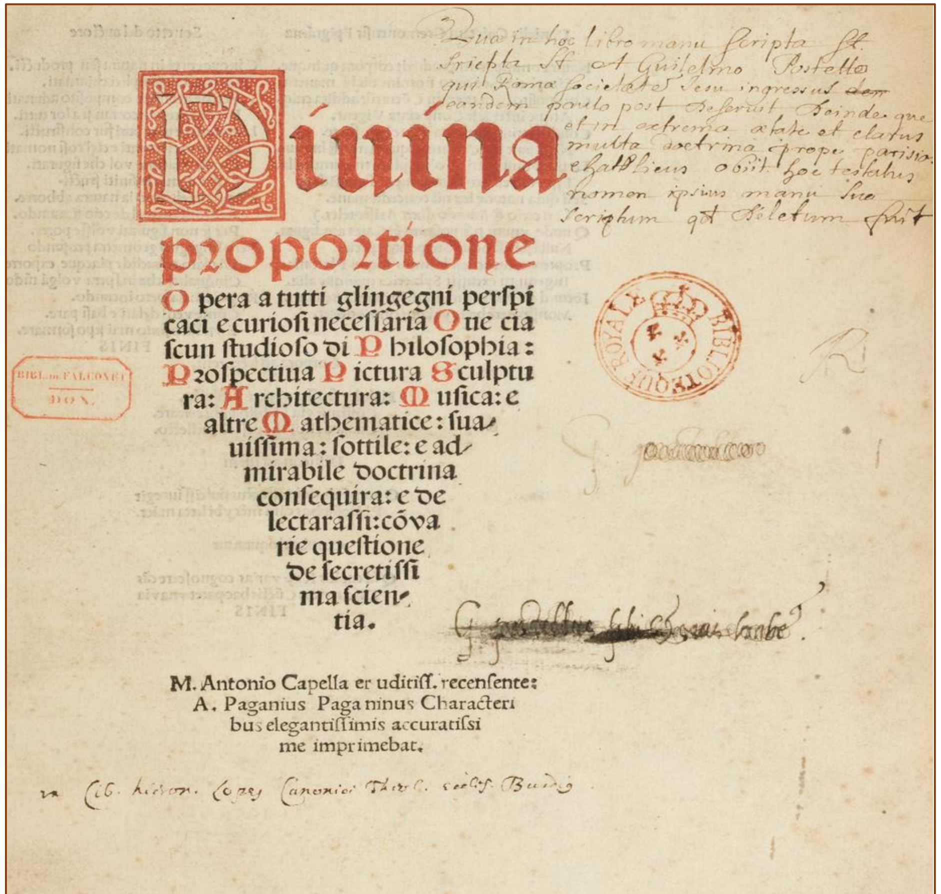
La produzione di Piero, peraltro, è emblematica della vitalità del doppio binario linguistico: le due lingue, latino e volgare, sono state a lungo usate insieme.

Questo non toglie che le due lingue venissero preferite l'una all'altra a seconda del contesto: Piero fece tradurre il *Libellus* e il *De Prospectiva* ma non il *Trattato d'abaco*: per i contenuti e lo stile, i primi due potevano trovare agevolmente posto nelle biblioteche umanistiche, mentre il *Trattato d'abaco*, destinato ai soli pratici, doveva necessariamente essere scritto in volgare.



Daly Davis M. (1977), *Piero Della Francesca's Mathematical Treatises: The Trattato D'abaco and Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, Longo (parz. ristampato in *Pacioli: letture e interpretazioni*, a cura di A.Ciocci, Centro Studi Mario Pancrazi, 2012)

Il *Libellus* di Piero non verrà pubblicato tuttavia dal suo autore ma da un altro importante personaggio del Rinascimento matematico: **Luca Pacioli**


Diuina proportione

Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria Oue ciascun studioso di Philosophia: Prospectiua Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematice: suauissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi: cõ varie questione de secretissima scientia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente: A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.

Luca Pacioli e Piero della Francesca

Quali sono le opere di Piero che si ritrovano in Pacioli?

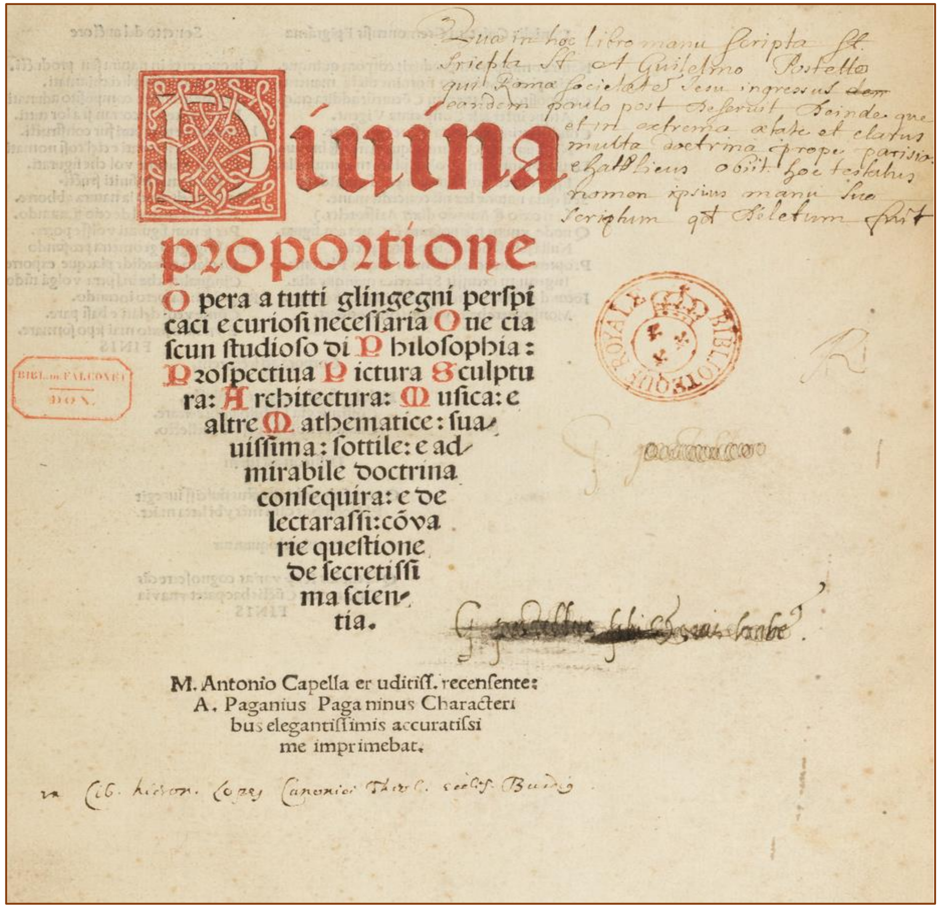
- Nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Venezia 1494) Frate Luca pubblica una cinquantina di problemi tratti dal *Trattato d'abaco* di Piero.

- Nell'edizione del 1509 del *De divina proportione*, Luca pubblica l'intero *Libellus de quinque corporibus regularibus* **in volgare**, come terza parte del suo trattato, dal titolo *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis* (solo il titolo è in latino)

Secondo Margareth Daly Davis, Piero scrisse originariamente il trattato in volgare e lo fece poi tradurre in latino per farne omaggio al Duca. Tuttavia, la versione di Pacioli non è una copia dell'originale volgare di Piero (che poteva essersi procurato) ma una traduzione dalla versione latina al volgare.

Un raffronto linguistico tra i due testi mostra una significativa povertà lessicale del volgare quattrocentesco rispetto al latino umanistico.

Le conclusioni alle quali giungono Gamba e Montebelli sono che Pacioli abbia rivisto il testo latino originale dal punto di vista matematico ma in modo superficiale e discontinuo, correggendo gli errori più evidenti. Ha anche corretto qualche calcolo errato, ma ha introdotto nuovi errori.



Caſus ·10·

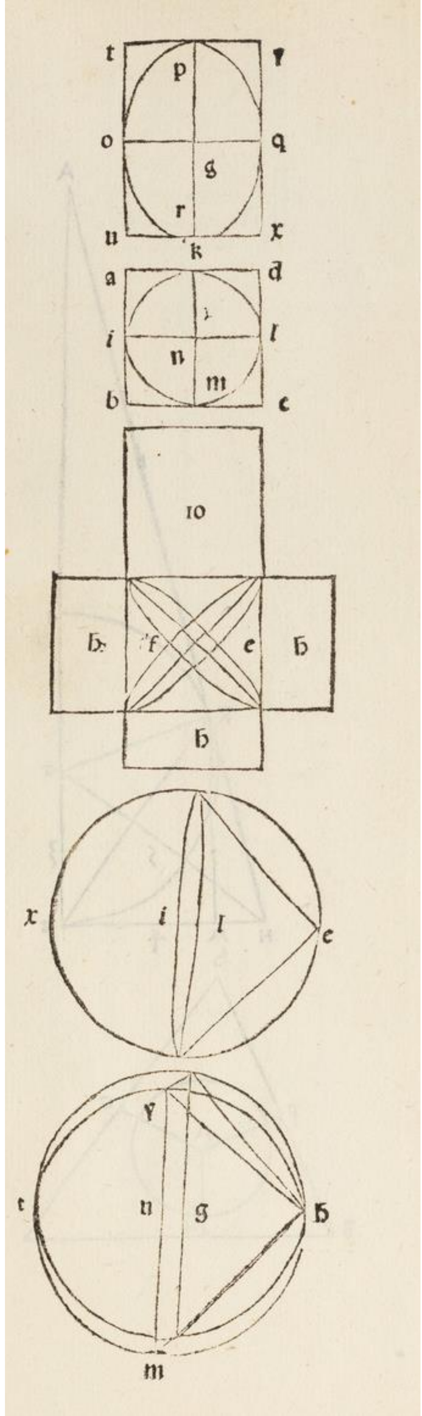
Eglie vna colõna tõda a ſeſto che il diametro ſuo e.4. cioe de ciaſcuna ſua baſa & vnaltra colõna, de ſimile groſſeçça la fora hortogonalmente domandaſe che quantita ſe leua de la prima colõna per quella foratura cioe che qñtita ſe leua de la colõna per quello buſo.

¶ Tu ai a ſapere che la colõna forata e nel curuo ſuo doue principia il foro & doue finiſci nel curuo opoſto he a la linea recta & laxis de la colõna che fora paſſa per laxis de la forata ad angulo recto & le linee. loro fano vno quadrato nella loro curuita & deſopra & de ſocto ſe coniungono in doi poncti cioe vno ſopra e laltro ſocto. Exemplo ſia la colõna forata.h. & la colõna che la fora.g. & il foro ſia.a.b.c.d. & ipuncti de cõtacti de la loro curuita ſia.e.f. del quale foro ſe cerca la ſua quantita. Eſſe dicto che ciaſcuna colõna e.4. per groſeçça adunqua il quadrato.a.b.c.d.e.4. per lato il quale lato multiplica in ſe fa.16. & .e.f. e pure.4. ch̃ la groſſeçça dela colõna ch̃ multiplicato cõ la ſuꝑficie dela baſa che e.16· fa.64· il quale parti ꝑ.3. neuene.21⅓. & queſto redoppia fa.42⅔. & .42.e.⅔. ſeleua dela colõna.h. ꝑ lo dicto foro. la proua tu ſai che le dicte colõne nel foro fano vno quadrato che e .a.b.c.d. pero fa vna ſuperficie quadrata de ſimile grandeçça che ſia pure .a.b.c.d. nella quale fa vno circulo che ſia.i.k.l.m. & il centro ſuo ſia.n. da poi fa vna altra ſuperficie che li doi lati opoſti ſia ciaſcũo eq̃le ala diagonale.a.c. del foro dela colõna & glialtri doi lati ciaſcuno eq̃le.a.b. il quale ſia.t.u.x.y. nel q̃le deſcriui vno circulo ꝓportionato tocando ciaſcuno lato de tale quadrato in puncti.o·p.q.r· & il centro ſuo ſia.s· dico eſſere quella proportione dal quadrato.a.b.c.d. al quadrato.t.u·x.y. che e dal circulo.i.k.l.m. al circulo .o.p.q.r· & quella ꝓportione e dal tondo.i.k.l.m. al quadrato ſuo .a.b.c.d· che e dal tondo.o.p.q.r. al quadrato ſuo.t·u.x.y. cõmo ꝑ la ·5. del terço de archimede de conoidalibus hora diuidi il quadrato.a.b.c.d. per equali con la linea.k m poi tira.k.l·m.l. faraſſe il triangulo.k.l.m· & deuidi per equali il q̃drato.t.u.x.y. con la linea.p.r. poi linea.p.q.q.r. faſſe il triãgulo.p.q.r. dico quella ꝓportione e dal triangulo.k.l.m. al triangulo.p.q.r· quale e dal q̃drato .a.b.c.d .al quadrato ·t.u.x.y. & quella che e dal triangulo.k.l.m. al ſuo quadrato.a.b c d. quella e dal triangulo.p·q.r· al ſuo quadrato.t.u.x.y. Et deſopra fu dicto che tale ꝓportione era dal tondo.i.k.l.m. ala ſuperficie. a.b.c.d. quale era dal circulo.o.p.q.r. ala ſuperficie.t·u.x.y. adunqua ſeguita ꝑ comuna ſcientia che tale proportione ſia dal triangulo.k·l.m. al ſuo circulo.i.k.l.m. quale e dal triangulo.p.q·r. al ſuo circulo.o.r.p.q. Et queſto inteſo faremo le figure corporee la prima fia la ſpera ſegnata.e.k.m.f. el ſuo axis e f. & laltra che in torno al quadrato.t.u.x.y· ſono doi circuli vno e.t.r.x.s. e laltro.y.r.u.s. che ſe interſegano in pũcto.r. & in puncto.s. nelle quali figure corporee faro in ciaſcuna vna piramide nella ſpera ·e·k. m.f. linearo.k. m. circulare poi traro.k.e. e·m che fia.k.e.m. piramide ſula baſa tonda k.l. m.i. poi faro laltra piramide nel laltra figura corporea che ſira.t.r.y.r.x.r.u. r. le quali piramide ſono in ꝓportione fra loro ſi cõmo ſono le loro matri cioe le figure corporee nelle quali ſono fabricate cõmo ſe moſtro deſopra ne le ſuperficie piane cõmo il circulo.t.r.x.s. e equale al circulo·o.p.q.r. dela ſuperficie.t.u.x·y. & i lati de la piramide.t.r.r.x. ſono equali a doi lati del triangulo.p.q.r. cioe.p.q.q.r· & .k.e.m. lati de la piramide dela ſpera. cioe.k·e.

e.m. ſono equali a doi lati del triangulo.k.l. m. del circulo.i.k.l.m. cioe.k.l. l.m. adunqua concludeno eſſere quella ꝓportione dela piramide.t.r.y.r.x. r.u.r. al ſuo corpo.t.r.u.s. che e dala piramide.k.e.m. ch̃ la ſua baſa.i.k.l.m. circulare al ſuo corpo ſperico .k.e.m.f. adunqua per la .33. del primo de ſpera & cono de archimede doue dici ogne ſpera eſere q̃drupla al ſuo cono del quale la baſa e eq̃le al magior circulo deſſa ſpera & laxis equale al ſemi diametro adunqua piglia la baſa.t.u.x.y. che e.4. per lato multiplica in ſe fa·16. li quali multiplica per lo ſuo axis ch̃ e.2. fa.32. e queſto ꝑti per .3. neuene 10⅔. & il corpo ſuo.t.r.x.s.e.4. tanti pero multiplica.10⅔. per.4. fa.42⅔. conmo fu dicto deſopra & ai che ſe leua de la colona.h. per q̃llo foro.42.e.⅔.

Il testo della dimostrazione:

- Si può studiare nell’originale latino di Piero
- Si può studiare nella traduzione vernacolare di Frate Luca
- Usando entrambe le fonti confrontandole dal punto di vista linguistico



Caſus .10.

Eglie vna colõna tõda a ſeſto che il diametro ſuo e.4. cioe de ciaſcuna ſua baſa & vnaltra colõna, de ſimile groſſeçça la fora hortogonalmente domandaſe che quantita ſe leua de la prima colõna per quella foratura cioe che q̃tita ſe leua de la colõna per quello buſo.

¶ Tu ai a ſapere che la colõna forata e nel curuo ſuo doue principia il foro & doue finiſci nel curuo opoſto he a la linea recta & laxis de la colõna che fora paſſa per laxis de la forata ad angulo recto & le linee.loro fano vno quadrato nella loro curuita & deſopra & de ſocto ſe coniungono in doi poncti cioe vno ſopra e laltro ſocto. Exemplo ſia la colõna forata.h. & la colõna che la fora.g. & il foro ſia.a.b.c.d. & i puncti de cõtacti de la loro curuita ſia.e.f. del quale foro ſe cerca la ſua quantita. Eſſe dicto che ciaſcuna colõna e.4. per groſeçça adunqua il quadrato.a.b.c.d.e.4. per lato il quale lato multiplica in ſe fa.16. & .e.f. e pure.4. ch̃ la groſſeçça dela colõna ch̃ multiplicato cõ la ſup̃ficie dela baſa che e.16. fa.64. il quale parti ꝑ.3. ne uene.$21\frac{1}{3}$. & queſto redoppia fa.$42\frac{2}{3}$. & .42.e.$\frac{2}{3}$. ſe leua dela colõna.h. ꝑ lo dicto foro. la proua tu ſai che le dicte colõne nel foro fano vno quadrato che e .a.b.c.d. pero fa vna ſuperficie quadrata de ſimile grandeçça che ſia pure .a.b.c.d. nella quale fa vno circulo che ſia.i.k.l.m. & il centro ſuo ſia.n. da poi fa vna altra ſuperficie che li doi lati opoſti ſia ciaſcũo eq̃le ala diagonale.a.c. del fo

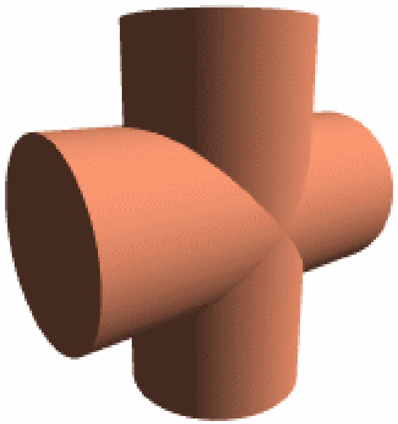
Casus ·10·

Eglie vna colõna tõda a sesto che il diametro suo e.4. cioe de ciascuna sua basa z vnaltra colõna, de simile grossezza la fora hortogonalmente domandase che quantita se leua de la prima colõna per quella foratura cioe che q̃tita se leua de la colõna per quello buso.

Casus 10.

Egli è una **colonna tonda** a sesto **che il diametro suo è 4** cioè de ciascuna sua basa et un'altra colonna de simile grossezza la fora hortogonalmente. Domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella foratura cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso.

Luca Pacioli



Est quedam coluna rotunda ad circinum, cuius dyameter e 4 brachiorum. id est cuiuslibet eius basis & alia coluna eiusdem grossitiei ortogonaliter pforat. queritur que quantitas auferatur a prima coluna p ipsum foramen.

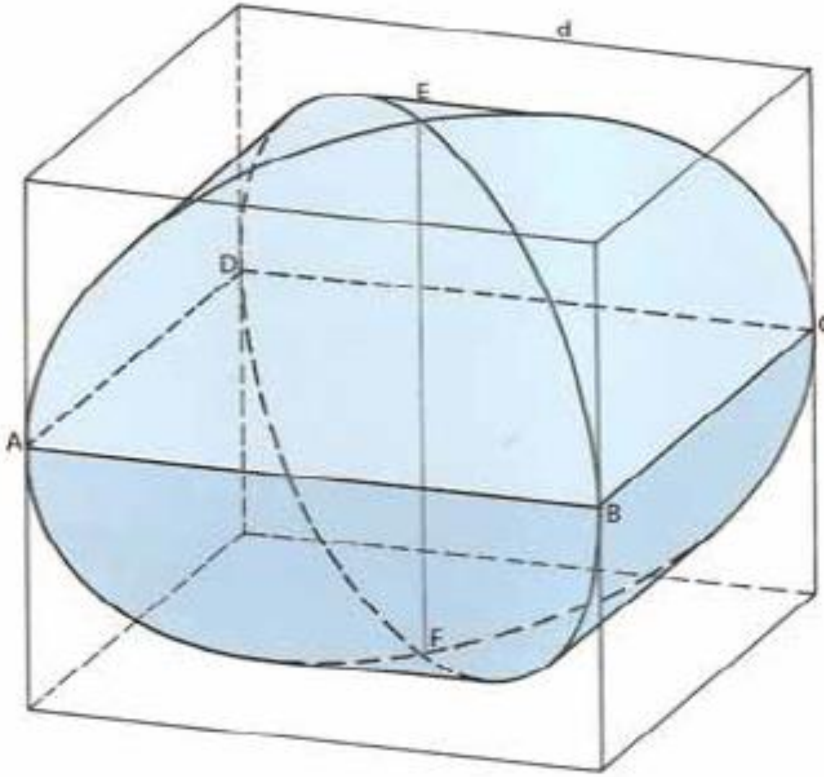
Scire debes q coluna perforata & in concavitate sua ubi incipit foramen & in concavitate ei opposita, ubi foramen desinit pforatur ad rectam linea. Et axis colune pforantis it p assem colune pforate ad angulu rectum & ipsaru linee co ficiunt unum quadratu in eoru concavitate & superius & inferius se in duobus punctis contingunt id e. uno in supiori & altero in inferiori parte. Exemplu. Sit coluna pforata H &

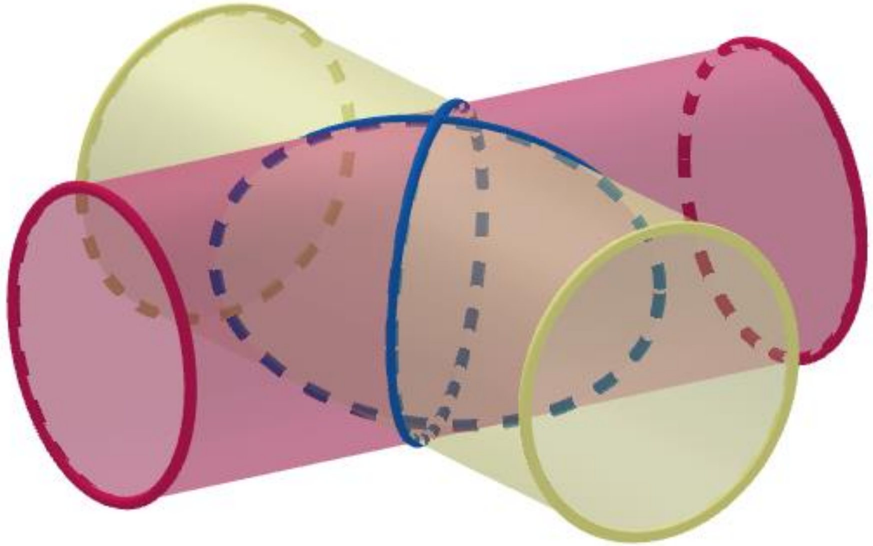
Casus X

Est quaedam **columna rotunda** ad circinum, cuius dyameter est 4 brachiorum, id est cuiuslibet eius basis et alia columna eiusdem grossitiei ortogonaliter perforat. Quaeritur quae quantitas auferatur a prima columna per ipsum foramen.

Piero della Francesca

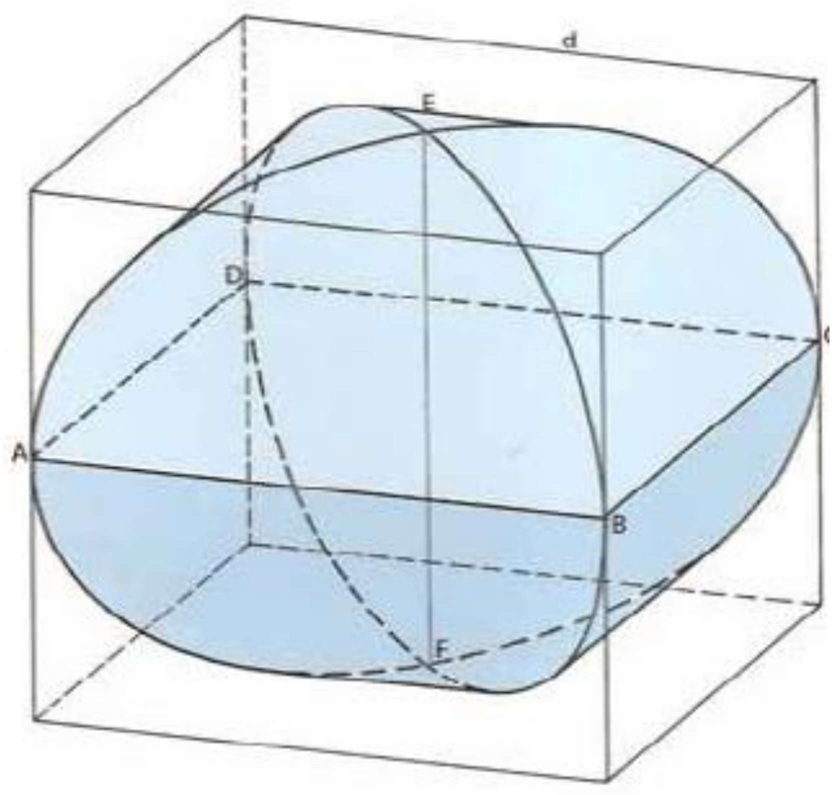
Tu ài a sapere che la colonna forata, e nel curvo suo dove principia il foro et dove finisci nel curvo oposto he [forata] a la linea recta et l’axis de la colonna che fora passa per l’axis de la forata ad angulo recto et le linee **loro fano uno quadrato nella loro curvità**, et de sopra et de socto se coniungono in doi poncti cioe uno sopra e l’altro socto.



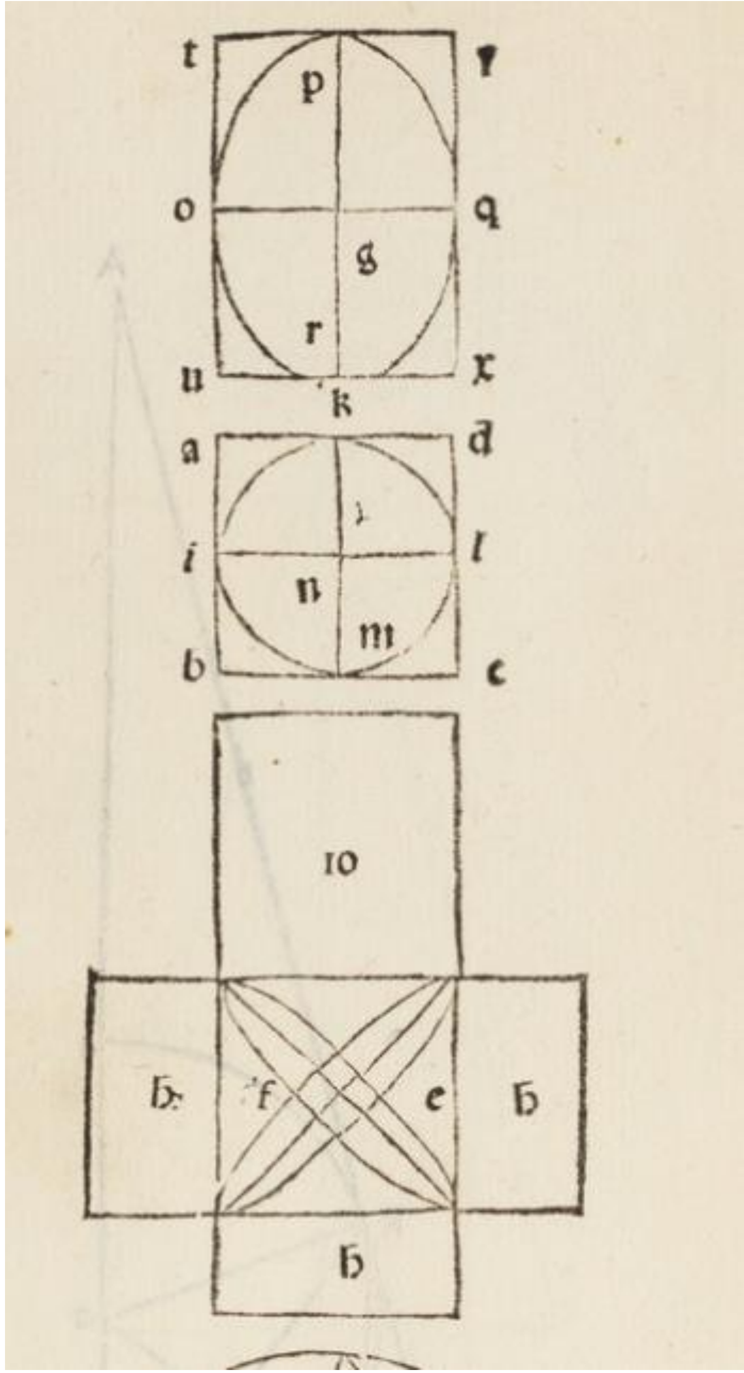


Primo passo: cercare di visualizzare questo oggetto geometrico

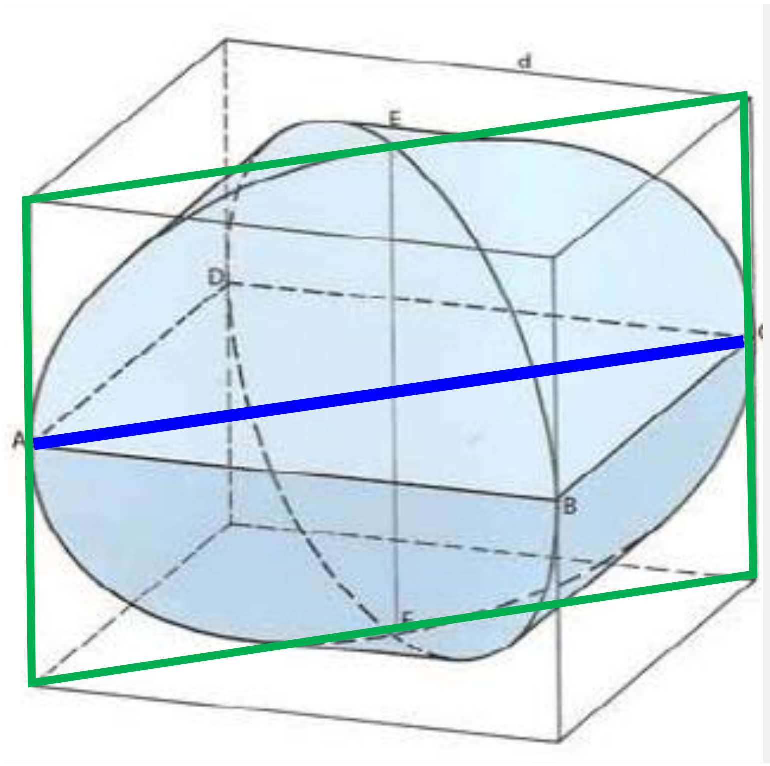
Exemplo: sia la colonna forata H et la colonna che la fora G et il foro sia ABCD et i puncti de contacti de la loro curvità sia E, F del quale foro se cerca la sua quantità. Esse dicto che ciascuna colonna è 4 per grossezza adunqua il quadrato ABCD è 4 per lato, il quale lato multiplica in sé fa 16 et EF è pure 4 ch'è la grossezza de la colonna, che multiplicato con la superficie de la basa che è 16 fa 64, il quale parti per 3 ne vene 21 1⁄3 et questo redoppia fa 42 2⁄3 et 42 e 2⁄3 se leva de la colonna H per lo dicto foro.

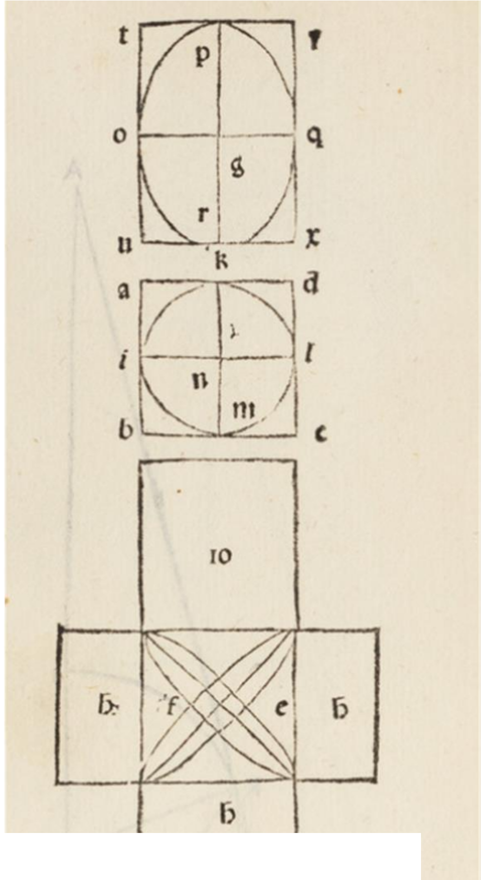


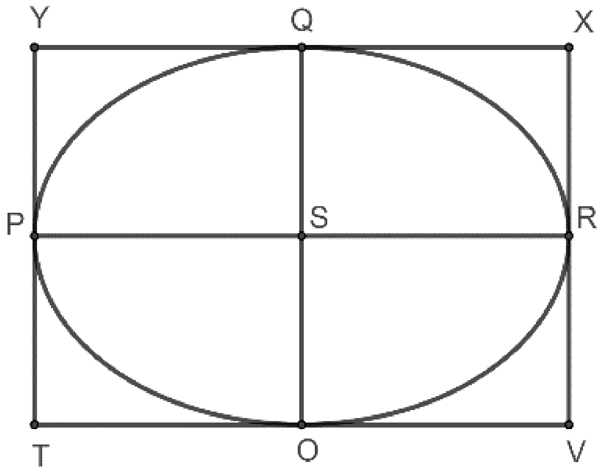
$$V = \frac{2}{3} d^3$$

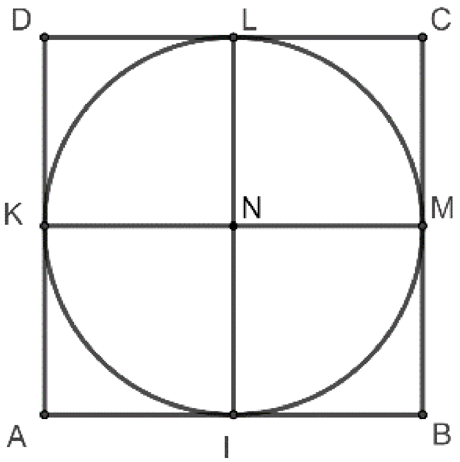


La prova: tu sai che le dicte colonne nel foro fano uno quadrato che è ABCD però fa’ una superficie quadrata de simile grandezza che sia pure ABCD nella quale fa’ uno circulo che sia IKLM et il centro suo sia N. Dapoi fa’ una altra superficie che li doi lati oposti sia ciascuno equale a la **diagonale AC** del foro de la colonna et gli altri doi lati ciascuno equale AB il quale sia TVXY, nel quale descrivi uno **circulo proportionato** tocando ciascuno lato de tale quadrato in puncti O, P, Q, R et il centro suo sia S.

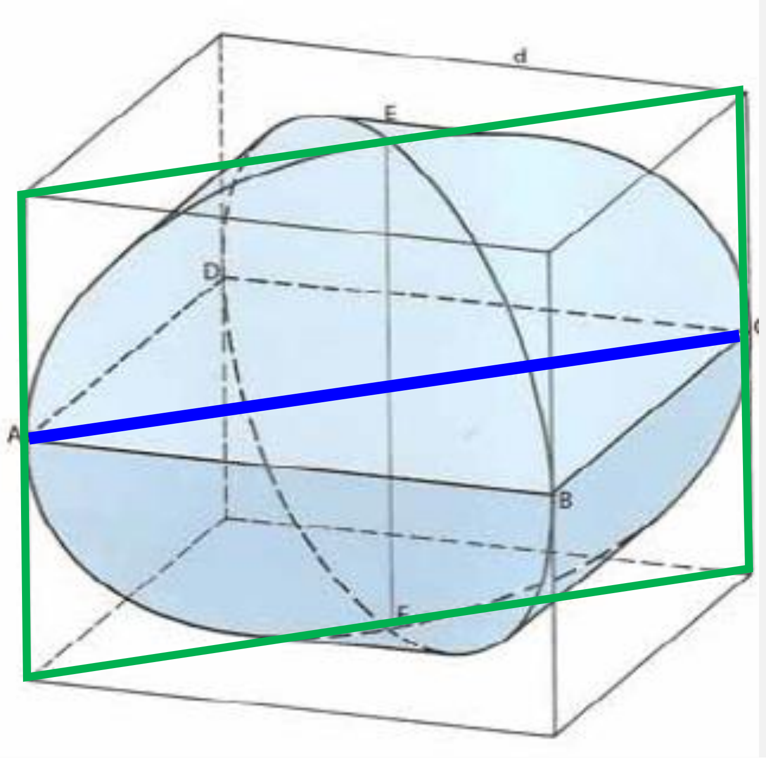


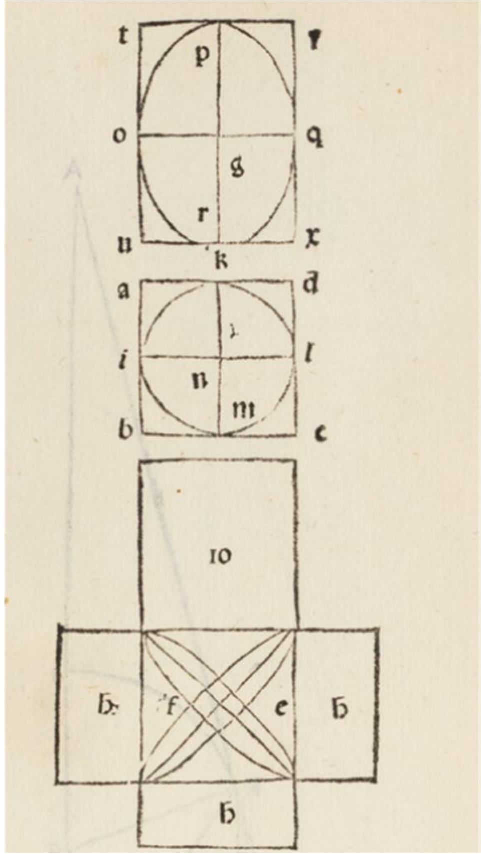




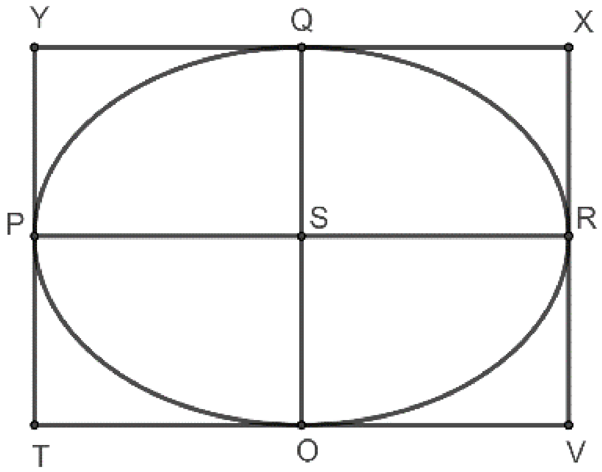


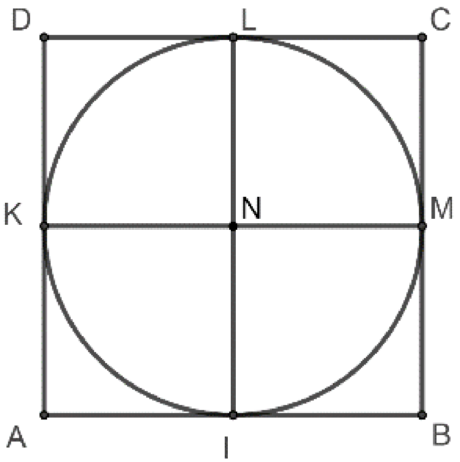
Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, **commo per la 5 del terzo di Archimede *De conoidalibus.***





Ma il trattato *Conoidi e Sferoidi* di Archimede che ci è stato trasmesso è in un unico libro.
E allora come si può spiegare questa citazione?





Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, commo per la 5 del terzo di Archimede *De conoidalibus*.

Il «terzo» si può riferire alla posizione che *De conoidibus et sphaeroidibus* occupa nella successione dei testi del Riccardiano 106 (cioè del codice di Piero che contiene il *corpus* archimedeo) . La prop.5 recita "Quodlibet spatium a koni acuti anguli sectione comprehensum ad quemcumque circulum comparetur, eam habet proportionem quam superficies ex utrisque eius sectionis diametris producta habere percipitur ad quadratum [diametri] eius circuli ad quem fuerit comparatum»

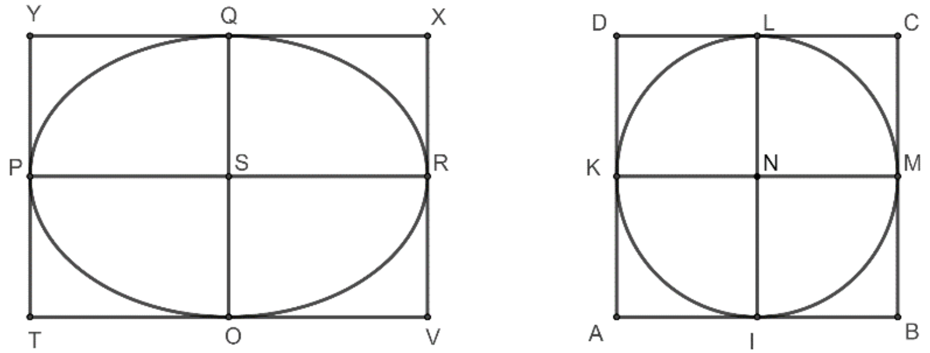
CS.5: *Qualunque area compresa da un'ellisse, rispetto a qualunque cerchio, ha lo stesso rapporto che il rettangolo compreso dai diametri dell'ellisse ha rispetto al quadrato del diametro del cerchio*

$$Area\ (ellisse): area\ (cerchio) = a \times b : \ d^2$$

Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, commo per la 5 del terzo di Archimede *De conoidalibus.*

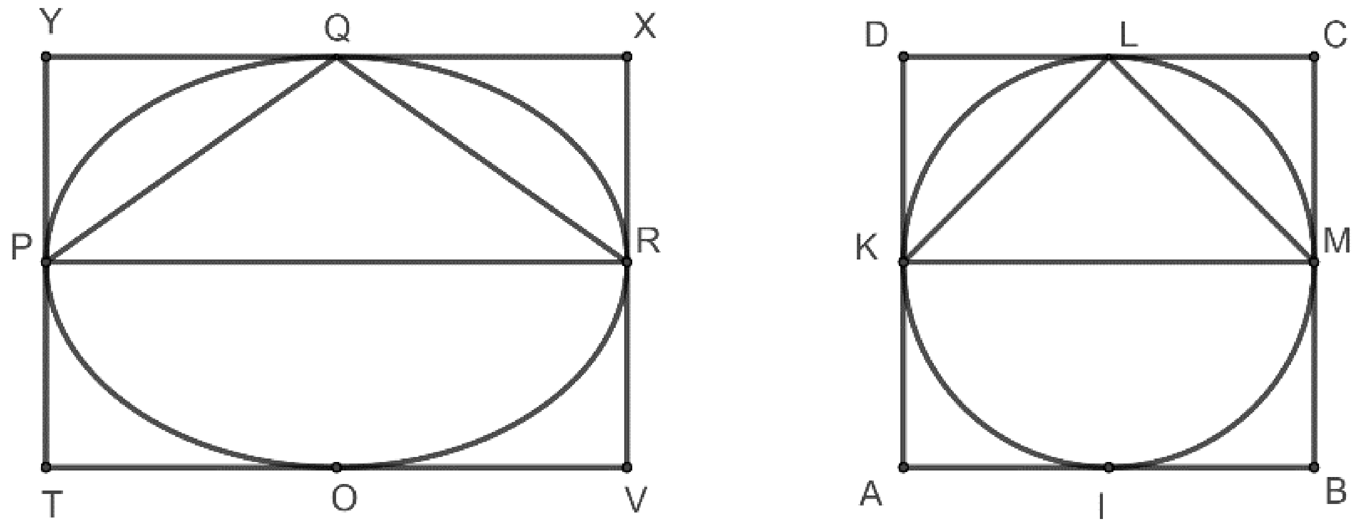
$$Area\ (ellisse): area\ (cerchio) = \left(\frac{TV}{2} \times \frac{VX}{2} \times \pi\right): \frac{AB^2\pi}{4}$$

$$Area\ (ellisse): area\ (cerchio) = TV \times VX : AB^2$$



Area (ABCD) : Area (TVXY) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

Hora dividi il quadrato ABCD per equali con la linea KM, poi tira KL, ML farasse il triangulo KLM et devidi per equali il quadrato TVXY con la linea PR, poi la linea PQ, QR fasse il triangulo PQR. Dico quella proportione è dal triangulo KLM al triangulo PQR quale è dal quadrato ABCD al quadrato TVXY et quella che è dal triangulo KLM al suo quadrato ABCD quella è dal triangulo PQR al suo quadrato TVXY. Et de sopra fu dicto che tale proportione era dal tondo IKLM a la superficie ABCD quale era dal circulo OPQR a la superficie TVXY, adunque seguita per comuna scientia che tale proportione sia dal triangulo KLM al suo circulo IKLM, quale è dal triangulo PQR al suo circulo ORPQ.

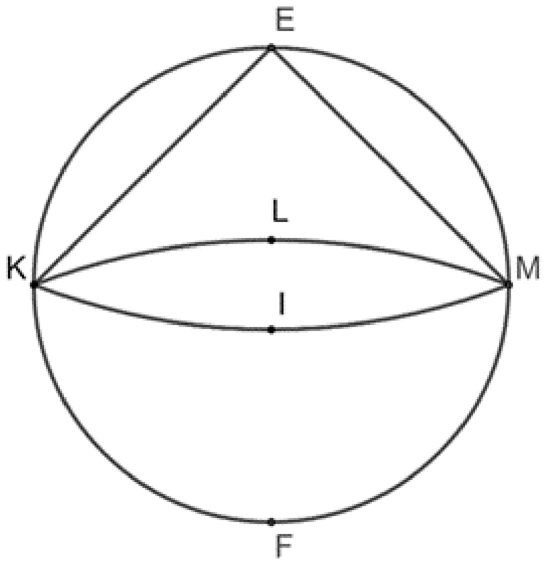


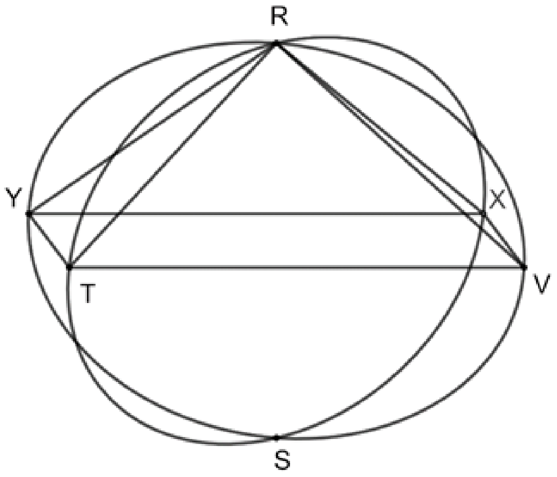
Area (KLM) : Area (PQR) = Area (ABCD) : Area (TVXY)

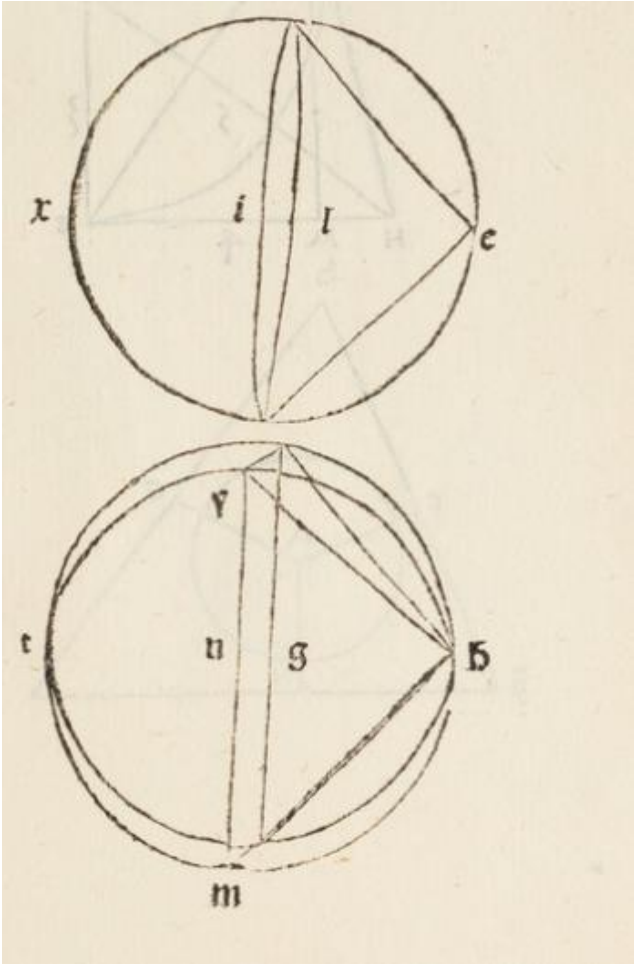
Area (ABCD) : Area (TVXY) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

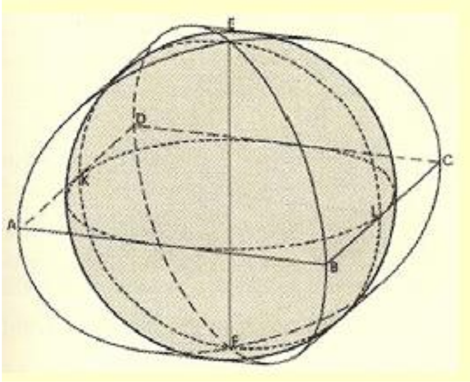
Area (KLM) : Area (PQR) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

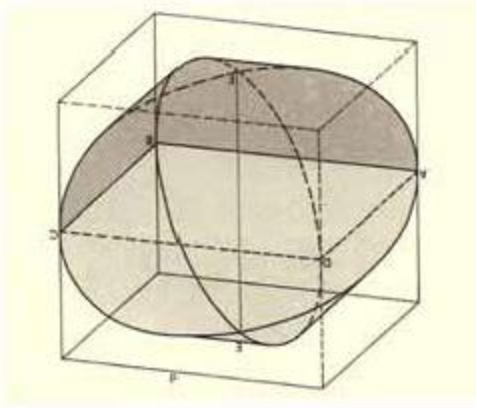
Et questo inteso **faremo le figure corporee**, la prima fia la spera segnata EKMF e’l suo axis EF et l’altra, ch’è intorno al quadrato TVXY, sono doi circuli uno è TRXS e l’altro YRVS che se intersegano in puncto R et in puncto S [R=E, S=F]



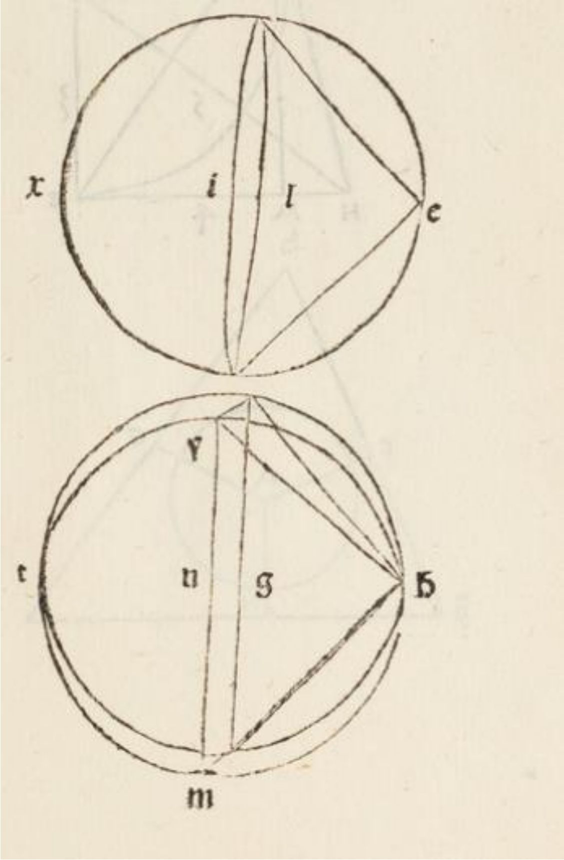


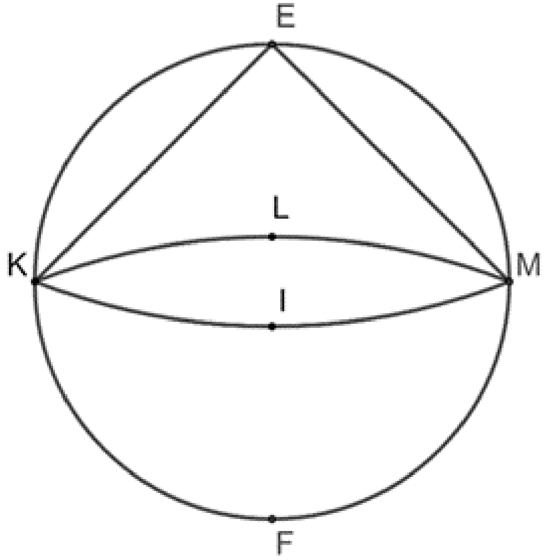


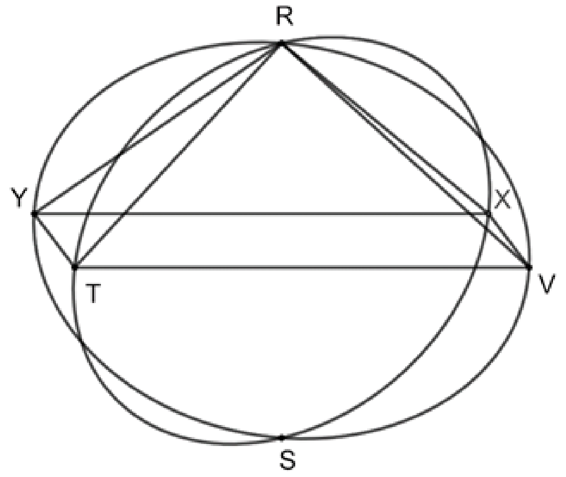


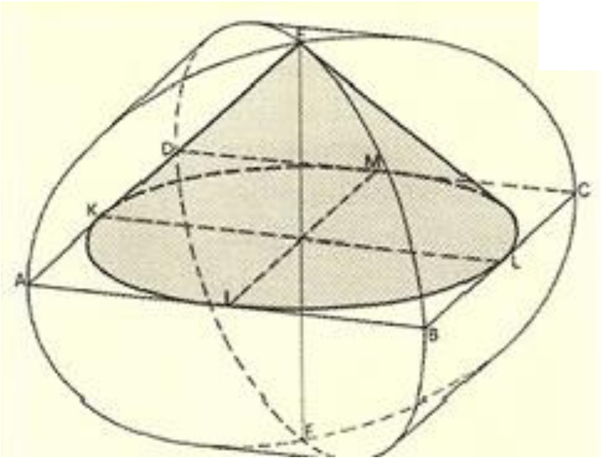


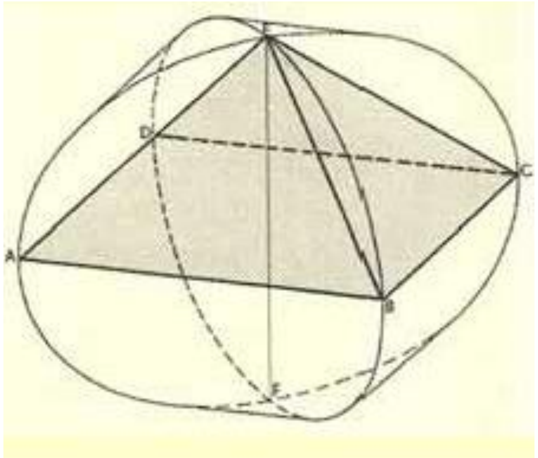
Nelle quali figure corporee farò in ciascuna una piramide, nella spera EKMF linearò KM circulare, poi trarò KE, EM che fia KEM piramide su la basa tonda KLMI. Poi farò l’altra piramide nell’altra figura corporea che sirà TR, YR, XR, VR

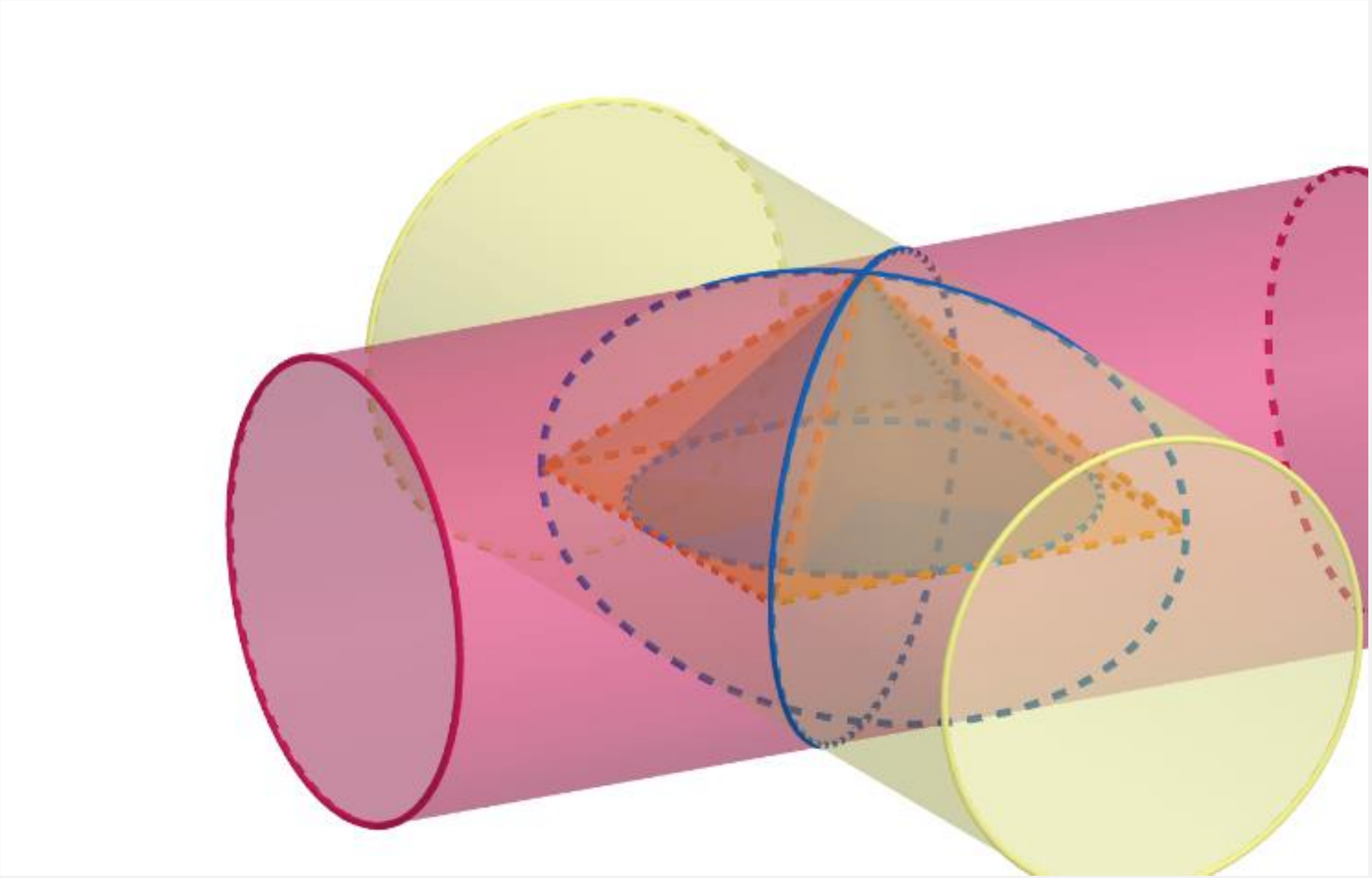




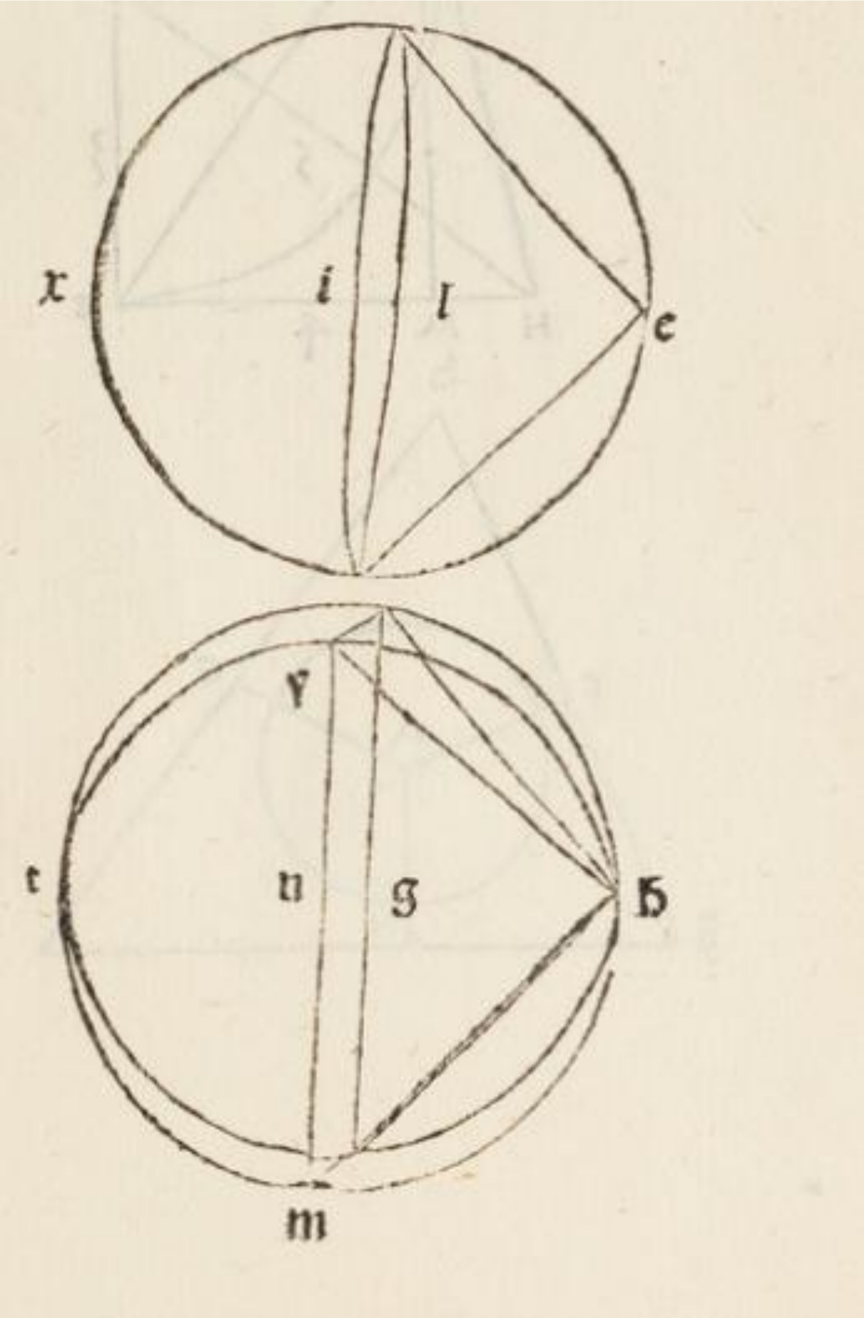


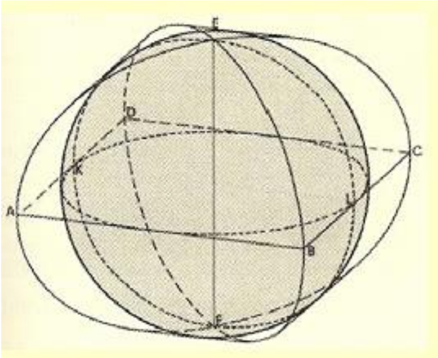




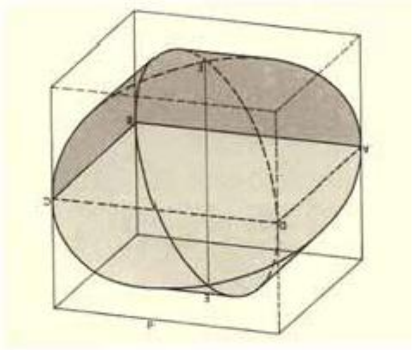


Nelle quali figure corporee farò in ciascuna una piramide, nella spera EKMF linearò KM circulare, poi trarò KE, EM che fia KEM piramide su la basa tonda KLMI. Poi farò l'altra piramide nell'altra figura corporea che sirà TR, YR, XR, VR **le quali piramide sono in proportione fra loro sì commo sono le loro matri, cioè le figure corporee nelle quali sono fabricate**, commo se mostrò de sopra ne le superficie piane, commo il circulo TRXS è equale al circulo OPQR de la superficie TVXY et i lati de la piramide TR, RX sono equali a doi lati del triangulo PQR, cioè PQ, QR et KEM lati de la piramide de la spera e cioè KE EM, sono equali a doi lati del triangulo KLM del circulo IKLM cioè KL, LM.

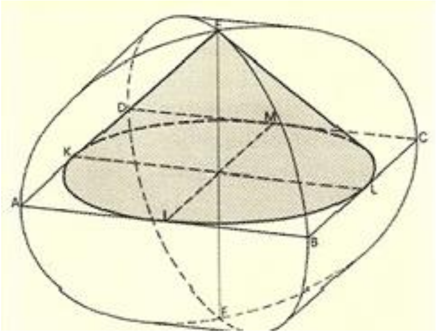




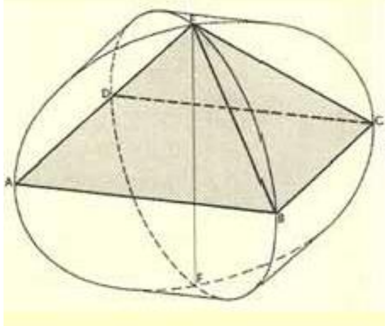
La sfera corrisponde al cerchio



La volta corrisponde all’ellisse



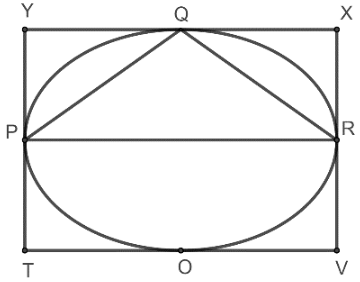
Il triangolo inscritto nel quadrato corrisponde al cono

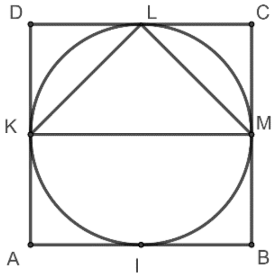


Il triangolo inscritto nell’ellisse corrisponde alla piramide

Area (KLM) : Area (PQR) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

Area (PQR) : Area (ellisse) = Area (KLM) : Area (cerchio)





Volume (piramide) : volume (doppia volta) = volume (cono) : volume (sfera)

Adunqua concludeno essere quella proportione de la piramide TR, YR, XR, VR al suo corpo TRXS , che è la piramide KEM ch'è la sua basa IKLM circulare, al suo corpo sperico KEMF. **Adunqua per la 33 del primo *De spera et cono* de Archimede** dove dici ogni spera esere quadrupla al suo cono del quale la basa è equale al magior circulo d'essa spera et l'axis equale al semidiametro, adunque piglia la basa TVXY che è 4 per lato, multiplica in sé fa 16, li quali multiplica per lo suo axis ch'è 2 fa 32 e questo parti per 3 ne vene 10 2⁄3 et il corpo suo TRXS è 4 tanti, però multiplica 10 2⁄3 per 4 fa 42 2⁄3, commo fu dicto de sopra et ài che se leva de la colona H per quello foro 42 e 2⁄3.

Quaelibet spera quadrupla est eius coni qui quidem conus basem habuerit aequalem circulo in spera maximo, altitudinem vero equalem semidiametro sperae (**I.33** *De sphaera et cylindro*, Vat. Urb. Lat. 261, f.23v (Archimede ed. Heiberg **I.34**, ed. Venatorius **I.32**)

Sfera e cilindro I. 33 (ed. Piero della Francesca, I.34 ed. Heiberg):
la sfera è 4 volte il cono che ha per base il cerchio maggiore e per altezza il raggio

Volume (piramide) : volume (doppia volta) = volume (cono) : volume (sfera)

Adunqua per la 33 del primo *De spera et cono* de Archimede dove dici ogni spera esere quadrupla al suo cono del quale la basa è equale al magior circulo d'essa spera et l'axis equale al semidiametro, adunque piglia la basa TVXY che è 4 per lato, multiplica in sé fa 16, li quali multiplica per lo suo axis ch'è 2 fa 32 e questo parti per 3 ne vene 10 2⁄3 et il corpo suo TRXS è 4 tanti, però multiplica 10 2⁄3 per 4 fa 42 2⁄3, commo fu dicto de sopra et ài che se leva de la colona H per quello foro 42 e 2⁄3.

Se la sfera è 4 volte il cono che ha per base il cerchio maggiore e per altezza il raggio

allora la doppia volta è 4 volte la piramide, che ha come base il quadrato di lato pari al diametro dei cilindri e altezza pari al raggio. Ma il volume della piramide si calcola facilmente:

$$\frac{1}{3}d^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{6}d^3$$

E quindi il volume della doppia volta diventa

$$\mathbf{4 \cdot \frac{1}{6}d^3 = \frac{2}{3}d^3}$$

Area (PQR) : Area (ellisse) = Area (KLM) : Area (cerchio)

Volume (piramide) : volume (doppia volta) = volume (cono) : volume (sfera)

Piero non dà una spiegazione di questo passaggio. E′ possibile ricostruirla?

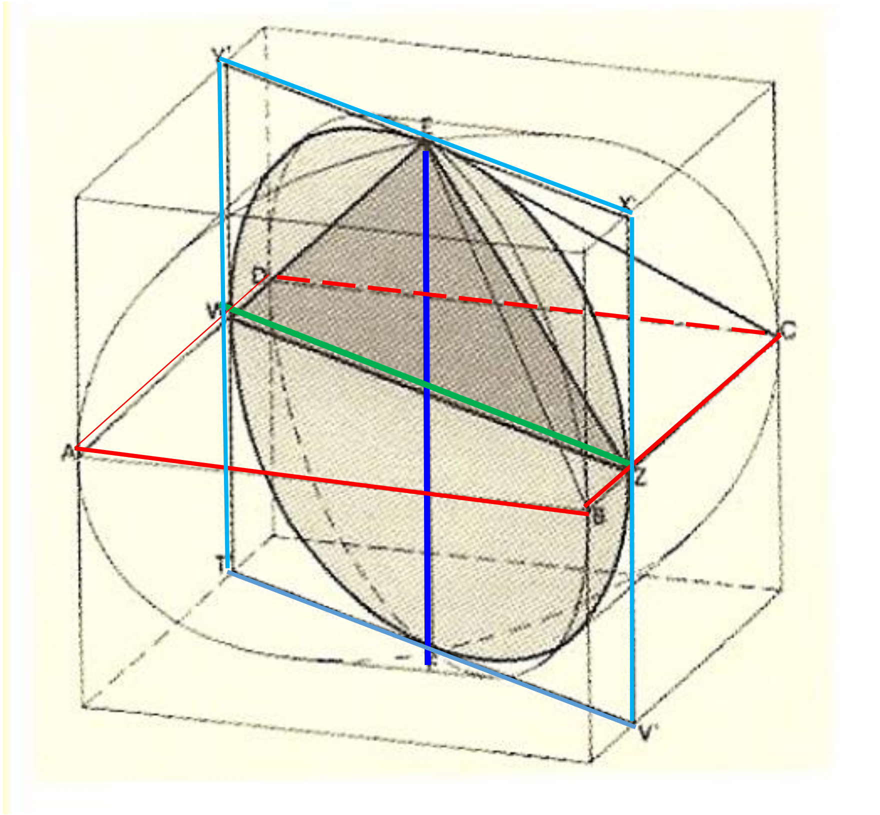
Enrico Gamba e Vico Montebelli hanno proposto una spiegazione.

La matematica di Piero della Francesca

di Enrico Gamba
Vico Montebelli
Pierluigi Piccinetti

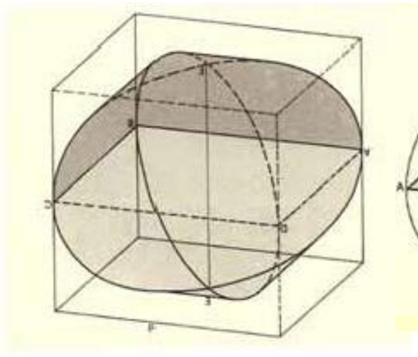
Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) La matematica di Piero della Francesca, *Lettera matematica Pristem*, 59, 49-59

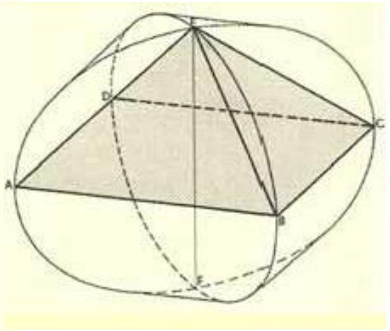
https://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/wp-content/uploads/2017/02/LM59_09.pdf



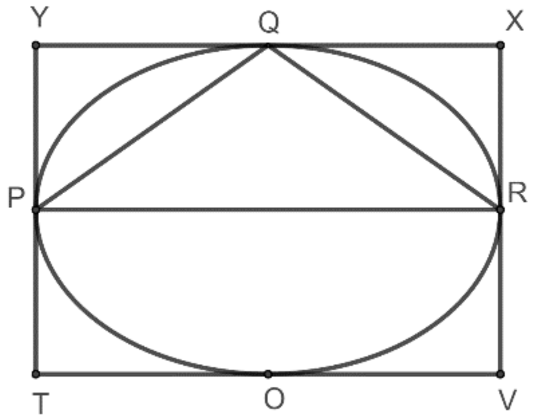
Consideriamo un piano del fascio di asse EF. Al variare di questo piano, la regione delimitata dall’ellisse genera la doppia volta: infatti questo piano seziona la volta secondo **un ellisse di asse minore EF e di asse maggiore variabile**. Gli estremi W e Z dell’asse scorrono lungo il perimetro del quadrato ABCD

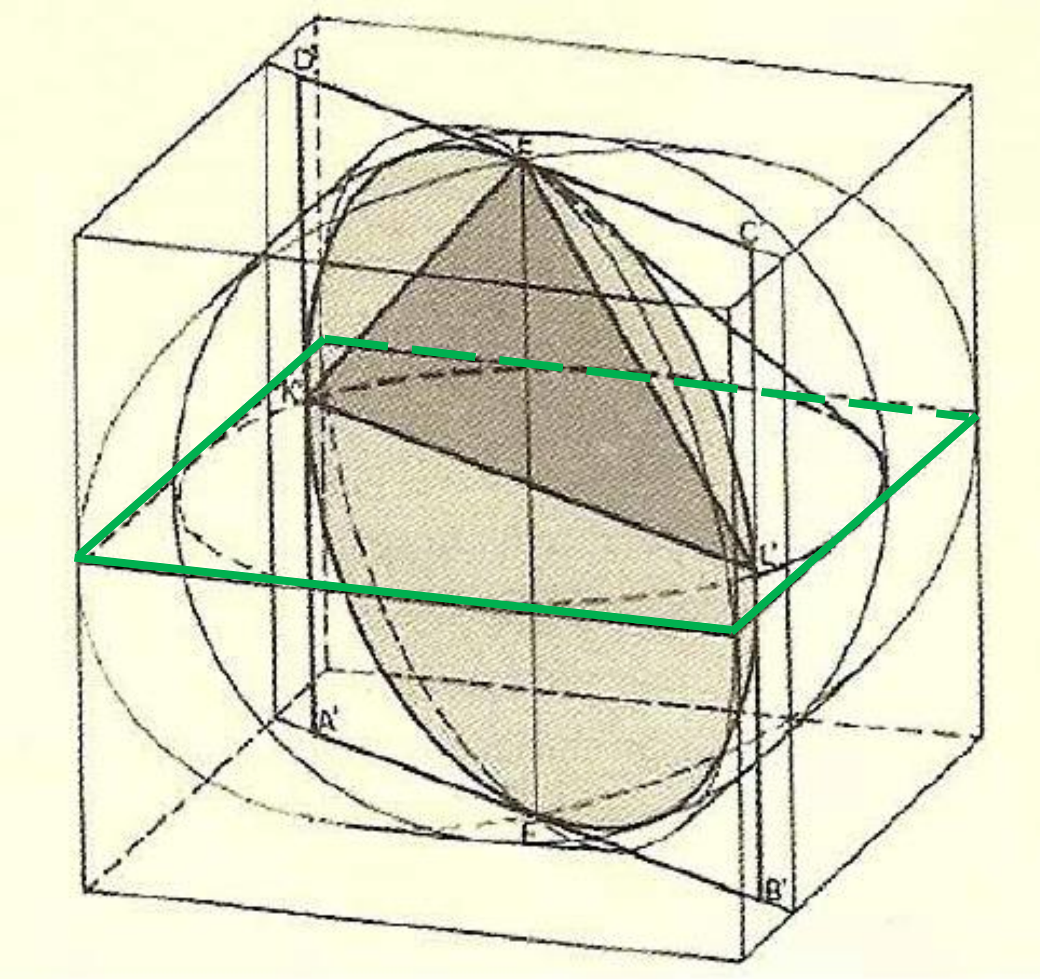
Il piano seziona anche il cubo **secondo il rettangolo T’V’X’Y’**, che è circoscritto all’ellisse.





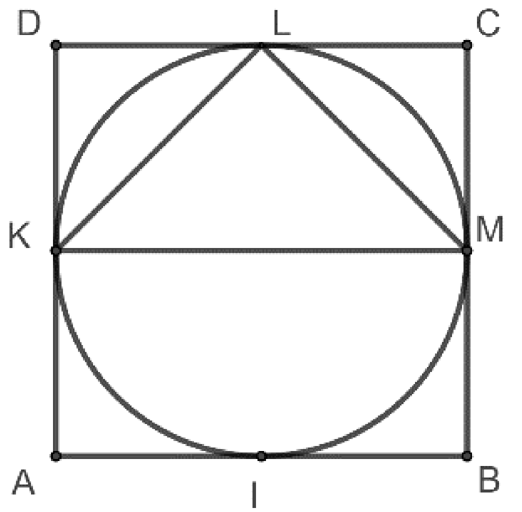
Il piano seziona anche la piramide di vertice E e base ABCD secondo il triangolo EWZ inscritto nell’ellisse





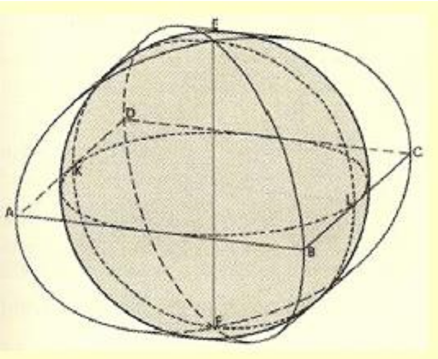
Lo stesso piano del fascio seziona inoltre

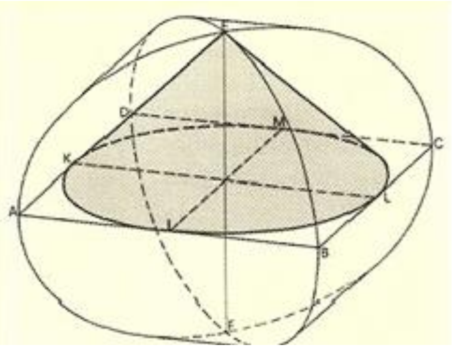
- La sfera inscritta nella doppia volta secondo una circonferenza EK′FL′ **inscritta nel quadrato A′B′C′D′ di lato d**
- Il cono secondo il triangolo EK′L′



Tra queste sezioni individuate da un piano generico (triangoli, cerchio ed ellisse) vale la relazione che è stata stabilita in precedenza:

Area (EK′L′) : Area (cerchio) = Area (EWZ) : Area (ellisse)





Poiché questa proporzione vale per ogni piano secante, Piero estende il rapporto tra le sezioni al rapporto tra i solidi «generati»

Fig. 13 Modello

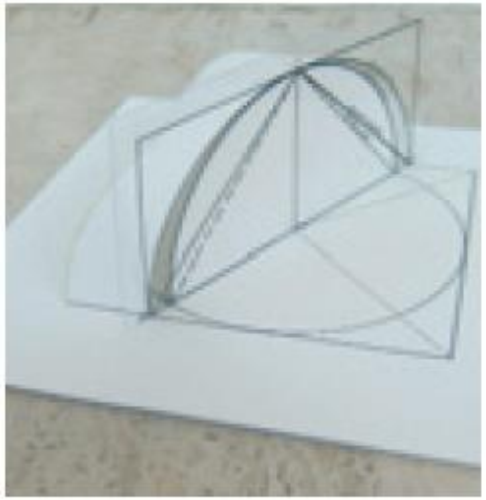


Fig. 14 Modello

I due modelli in figura realizzano in tre dimensioni quanto rappresentato nelle figg.13b (mod.1) e 14b (mod. 2) sotto forma bidimensionale. Il mod. 1 si riferisce alla sezione della volta a padiglione fatta secondo un piano passante per l'asse verticale EF della volta e per la diagonale del quadrato di base. Il mod. 2 si riferisce ad una sezione ottenuta con un piano qualsiasi passante con l'asse EF. I modelli visualizzano anche le sezioni della sfera, del cono e della piramide inseriti nella volta a padiglione di cui Piero si avvale per calcolarne il volume. Si può avanzare l'ipotesi che Piero abbia effettivamente costruito tali modelli come supporto visivo per la risoluzione del problema, è nota infatti la realizzazione all'epoca di modelli dei poliedri.

Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) *La matematica di Piero della Francesca*

La matematica di Piero della Francesca

di **Enrico Gamba**
Vico Montebelli
Pierluigi Piccinetti

Ammesso che questo sia il ragionamento di Piero, è corretto?
Si può passare da un rapporto tra sezioni al rapporto tra i solidi formati da quelle sezioni? E se sì, quando?

Un possibile spunto per proseguire questa riflessione è la tecnica che Archimede illustra a Eratostene nel *Metodo dei Teoremi Meccanici* (secondo il titolo dato al trattato dato dal filologo danese Johann Ludvig Heiberg nel 1906). Archimede annuncia a Eratostene di aver trovato che la (doppia) volta è 2/3 del cubo circoscritto. Questa proposizione manca nel palinsesto di Archimede, ma le proposizioni che la precedono determinano il volume dell'unghia cilindrica: di particolare interesse è la proposizione 14.

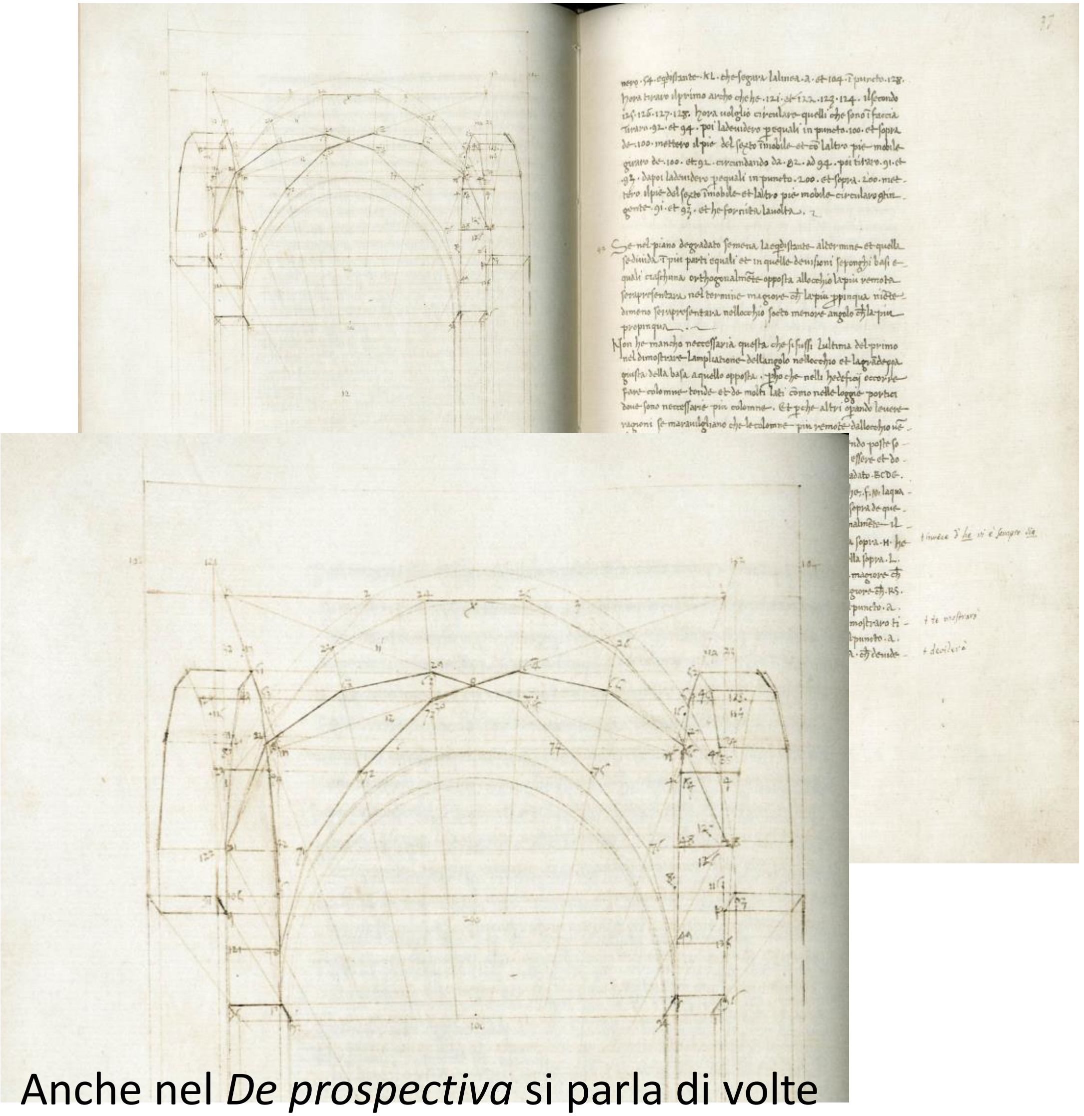
Qual è la fonte di Piero della Francesca?
E' possibile che sia stato il *Metodo* di Archimede o che sia un risultato originale?

Non abbiamo evidenze testuali in questo senso.

- per quanto ne sappiamo il palinsesto rimase sconosciuto fino al 1906
- in ogni caso nel palinsesto manca la dimostrazione della proposizione 16, che riguarda la cubatura della volta

E' esistito un altro codice con il *Metodo* noto nel Rinascimento? Non lo sappiamo

La questione (a quanto ne so) è aperta.



Anche nel *De prospectiva* si parla di volte
Codice conservato alla Biblioteca di Reggio (in volgare, autografi i disegni e le annotazioni marginali)
http://digilib.netribe.it/bdr01/visore2/index.php?pidCollection=piero:1&v=1&pidObject=piero:1&page=copertina_anteriore

Fonti

Archimede, *Metodo. Nel laboratorio del genio* (a cura di Acerbi F., Fontanari C., Guardini M.), Torino, Bollati Boringhieri 2013

Piero della Francesca, *De quinque corporibus regularibus*, Codice Urb. Lat. 632 https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus, corredato della versione volgare di Luca Pacioli*, Edizione Nazionale degli scritti di Piero della Francesca, Giunti 1995

Luca Pacioli, *Divina proportione*, Venetiis 1509

https://digitalis-dsp.uc.pt/html/10316.2/35396/P9.html

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k323371m?rk=42918;4

Bibliografia

Arrighi G. (1976), *Arte e matematica in Piero della Francesca*, ristampato in *La matematica dell'Età di mezzo. Scritti scelti* (a cura di Barbieri F., Franci R., Toti Rigatelli L.) ETS, Pisa 2004, pp. 371-376

Banker J. (2010), Luca Pacioli e Piero della Francesca, in *Pacioli 500 anni dopo* (a cura di E.Giusti e M.Martelli), Aboca edizioni, pp. 205-220 (rist. in *Pacioli: letture e interpretazioni*, a cura di A.Ciocci, Centro Studi Mario Pancrazi, 2012)

Ciocci A. (2015), *Luca Pacioli e l'*Archimede *latino*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XXXV 2, pp. 165-184

Clagett M. (1978), *Archimedes in the Middle Ages*, vol. III Part III *The Medieval Archimedes in the Renaissance 1450-1565*, The American Philosophical Society 1978.

Dalai Emiliani M., Curzi V. (a cura di), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Marsilio Padova 1996.

Daly Davis, M. (1977), *Piero Della Francesca's Mathematical Treatises: The* Trattato d'abaco *and* Libellus de Quinque Corporibus Regularibus, Longo.

Gamba E., Montebelli V. (1987), *La matematica abachistica tra ricupero della tradizione e rinnovamento scientifico*, in “Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento, Atti del Convegno internazionale di studio su Giovan Battista Benedetti e il suo tempo”. Istituto Veneto di scienze, lettere e arti, Venezia 1987, pp.169-202

Gamba E., Montebelli V. (1996), *La geometria nel* Trattato d’abaco *e nel* Libellus de quinque corporibus regularibus *di Piero della Francesca: raffronto critico*, in Dalai Emiliani M., Curzi V. (a cura di), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Marsilio Padova 1996, pp. 253-268.

Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) *La matematica di Piero della Francesca*, in “Lettera matematica Pristem 59”, Centro Eleusi, Università Bocconi, pp. 49-59 (https://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/wp-content/uploads/2017/02/LM59_09.pdf)

Mancini G. (1916), *L’opera “De corporibus regularibus” di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da Fra Luca Pacioli*, Memorie della R.Accademia dei Lincei, classe di scienze morali, storiche e filologiche, serie 5, vol. XIV Fasc.VIIB, CCCXII 1915 (rist. Roma 1916), pp.441-580.

Manescalchi R., Martelli M. (a cura di) (2007*) L'Archimede di Piero. Contributi di presentazione alla realizzazione facsimilare del Riccardiano 106*, Sansepolcro, Grafica European Center of fine Arts.

Napolitani, P. D. (2007), *Piero e la tradizione del testo di Archimede nel Quattrocento*, in *L'Archimede di Piero. Contributi di presentazione alla realizzazione facsimilare del Riccardiano 106*, a cura di Manescalchi R., Martelli M., Sansepolcro, Grafica European Center of fine Arts.

Napolitani P.D. (2010), *Archimede nella tradizione dell'abaco e nell'Umanesimo*, in *Pacioli 500 anni dopo* (a cura di E.Giusti e M.Martelli), Aboca edizioni, pp.221-246.

Napolitani P.D., Saito K. (2013), *Archimedes and the Baths: not only one Eureka*, in Lucore S.K., Trümper M., *Greek Baths and bathing culture: new discoveries and approaches*, Walpole, Leuven, pp.181-188.

Napolitani P.D., Saito K. (2014), *Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: The last proposition of the* Method, in Sidoli, N., Van Brummelen, G. (eds) *From Alexandria, Through Baghdad*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp.199-225.

Netz R., Saito K., Tchernetska N. (2001)*, A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest, I, Sciamvs, 2, pp. 9–29.*

Peterson M. A. (1997), *The Geometry of Piero della Francesca*, The Mathematical Intelligencer, 19, pp.33-40.

Rose, P.L. (1975), *The Italian Renaissance of Mathematics. Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, Librairie Droz.