Università degli Studi di Ferrara | Dipartimento di Matematica e Informatica

Liceo Matematico

DipMat — Università degli Studi di Salerno — Dipartimento di Matematica

Convegno "Matematica e Storia negli insegnamenti matematici"

28 aprile 2023

La geometria della piegatura della carta e la risoluzione di problemi di terzo grado

Paola Magrone
Dipartimento di Architettura - Università Roma Tre

I contributi che vedremo oggi sono dovuti a Margherita Piazzolla Beloch (Frascati 1879, Roma 1976)

Geometra algebrica esperta di fotogrammetria, röntegfotogrammetria, docente di matematiche complementari (e di molto altro)

Margherita Piazzolla Beloch (Frascati 1879, Roma 1976)

- 1909 Laurea in Matematica, Università di Roma, con Guido Castelnuovo
- 1927 Cattedra di Geometria Analitica e Proiettiva Università di Ferrara
- 1933 inizia ad insegnare corsi di Matematiche Complementari
- 1949 pensione
- 1950 Nasce l'Istituto di Geometria Superiore presso l'Università di Ferrara
- 1953 libro *Lezioni di Matematica Complementare (La Matematica Elementare vista dall'alto)*

Ritratto di Margherita Beloch, 1931. su concessione del Ministero per i beni e le attività culturali e per il turismo, ACS 2020 aut.n. 1616/2020

- M. Piazzolla Beloch (1934), Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row, *Atti dell'Acc. di Scienze Mediche. Naturali e Matematiche di Ferrara*, Serie II, XI:196–189

- M. Piazzolla Beloch (1936), Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici, *Periodico di Matematica*, 16, pp. 104-108.

XI.

SUL METODO DEL RIPIEGAMENTO DELLA CARTA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI GEOMETRICI (1)

1. - Stralcio dalle mie lezioni del corso di Matematiche complementari, tenuto all'Università di Ferrara nell'anno accademico 1933-34, alcune osservazioni sul *Metodo del ripiegamento della carta* (2) osservazioni che valgono a dare maggiore portata a questo metodo, sia come mezzo di risoluzione effettiva di alcuni problemi, sia come semplicità di costruzione in confronto alle costruzioni con riga e compasso dal punto di vista della geometrografia.

M. Piazzolla Beloch (1936), Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici, *Periodico di Matematica*, 16, pp. 104-108.

2. - Il primo ad attirare, col suo autorevole giudizio, l'attenzione degli studiosi sul metodo del ripiegamento della carta, dovuto al matematico indiano SUNDARA ROW, fu il KLEIN nelle sue celebri *Conferenze* su questioni di matematica ([3]).

Ora si può osservare che questo metodo, più che una semplice curiosità matematica, costituisca uno strumento che può servire utilmente per la risoluzione effettiva di una vasta categoria di problemi geometrici non risolubili con riga e compasso, come pure può rappresentare un effettivo risparmio di tempo per certe costruzioni risolubili con riga e compasso, come per es. in determinate costruzioni per tangenti delle coniche ([4]), che possono utilmente servire per procurarsi con poca fatica dei modelli delle tre specie di coniche.

Fin dall'antichità furono posti accanto a riga e compasso altri strumenti per quei problemi la cui risoluzione era stata tentata invano con riga e compasso. Questi strumenti però non si trovano alla portata di tutti, sebbene sarebbe desiderabile che almeno i più pratici di essi (come per es. il compasso concoidale) diventassero più accessibili. Il metodo del ripiegamento della carta invece non richiede che un foglio di carta trasparente, che tutti si possono pro-

---

(1) Pubb. in « Periodico di Matematica », anno 1936.

(2) V. SUNDARA-ROW, *Geometric Exercises in Paper Folding* (Madras, Addison & C., 1893; Court Company, 1917).

(3) F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Bd. II, pag. 267 (Berlin, Springer, 1926).

(4) V. *loc. cit.*, e C. A. RUPP, *On a transformation by paper-folding* (« Amer. Math. Monthly. », vol. XXXI, 1924, pag. 432).

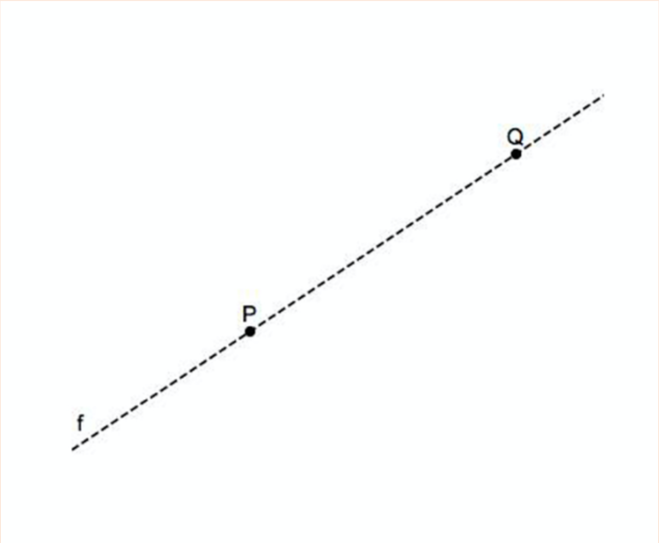
CHAPTER V.

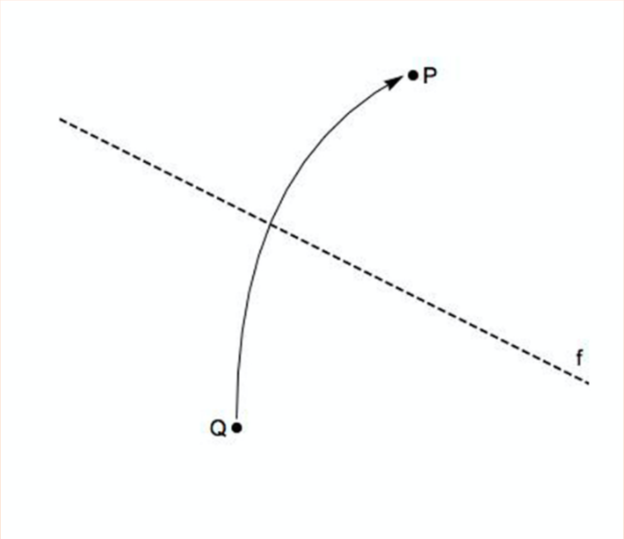
General Considerations on Algebraic Constructions.

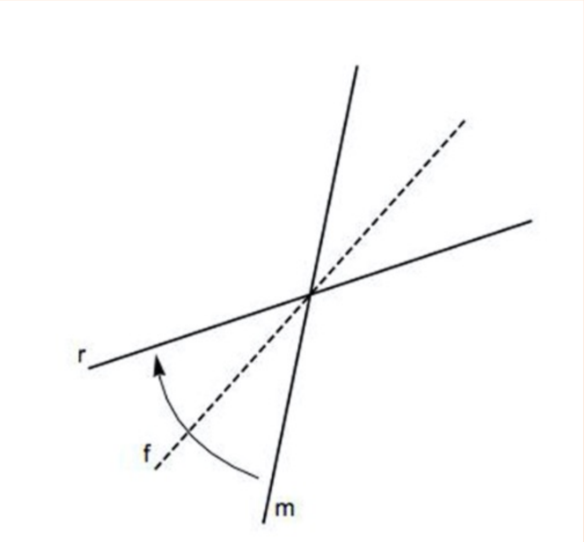
1. We shall now lay aside the matter of construction with straight edge and compasses. Before quitting the subject we may mention a new and very simple method of effecting certain constructions, *paper folding*. Hermann Wiener* has shown how by paper folding we may obtain the network of the regular polyhedra. Singularly, about the same time a Hindu mathematician, Sundara Row, of Madras, published a little book, *Geometrical Exercises in Paper Folding* (Madras, Addison & Co., 1893), in which the same idea is considerably developed. The author shows how by paper folding we may construct by points such curves as the ellipse, cissoid, etc.

Klein, F. Elementarmathematik vom höheren Standtpunkt aus, seconda edizione, Teubner, Leipzig, 1911; Jbuch 42, 109

Sundara Row *Geometric exercises in paper folding*, Addison and Co., Madras, 1893.
Frotespizi di varie edizioni, raccolti in (Magrone, Talamanca 2017)



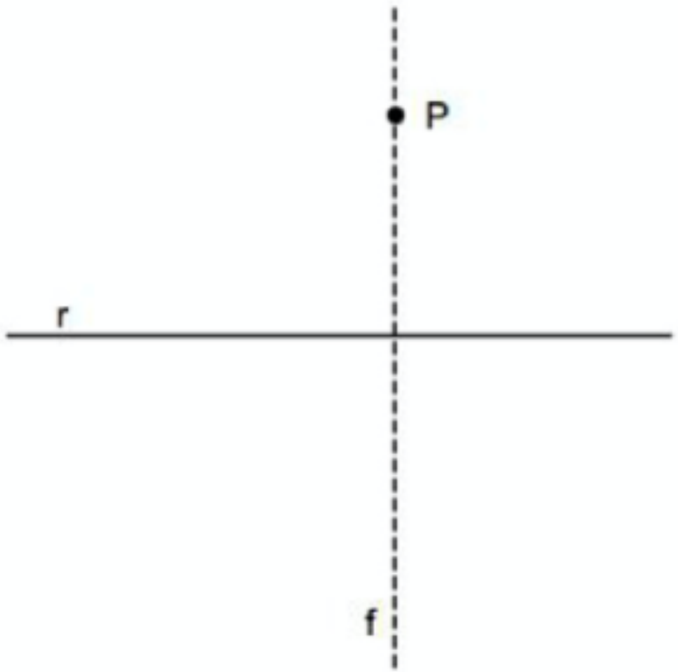


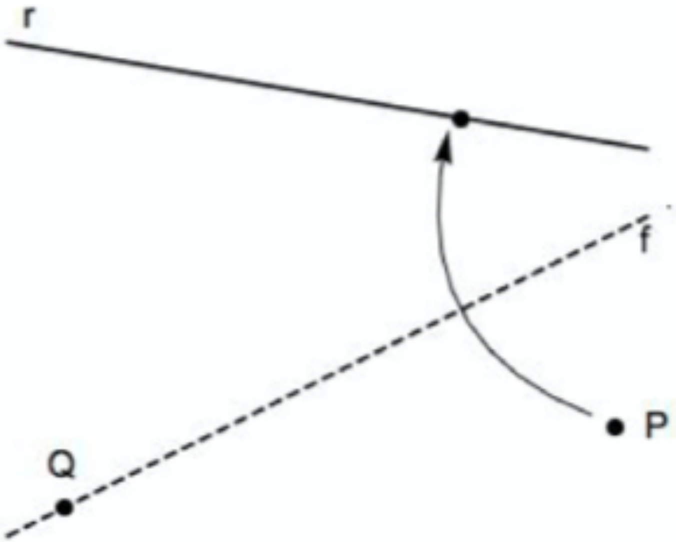


Dati due punti *P e Q,* esiste un'unica piegatura che passi per entrambi.

Dati due punti *P e Q* , esiste un'unica piegatura che porti *P su Q*

Date due linee rette *m ed r,* esiste sempre una piegatura che porti *m su r*

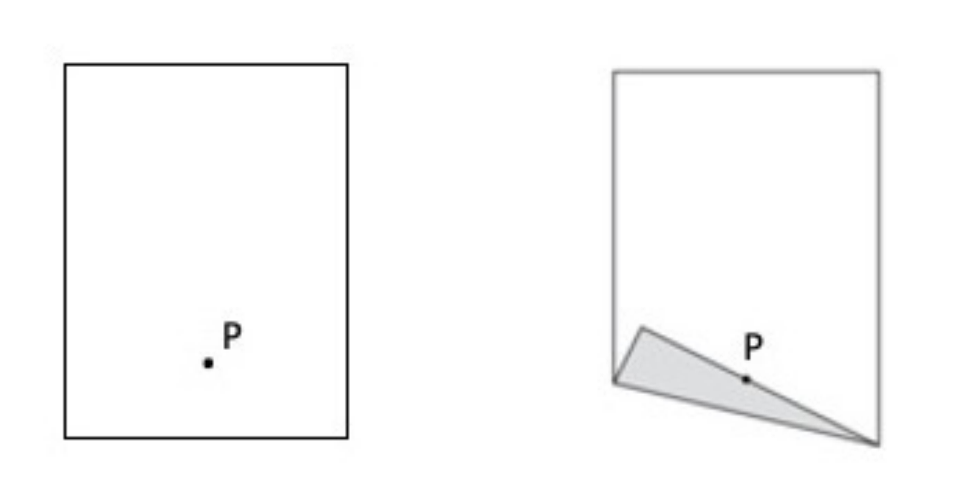


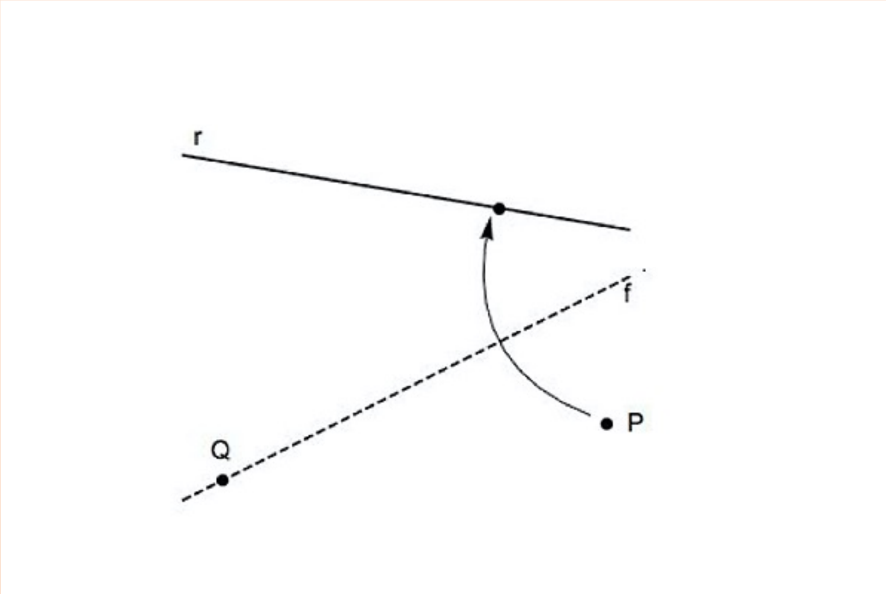


Dati un punto *p* e una retta *r*, esiste un'unica piegatura perpendicolare a *r* che passi per il punto *p*.

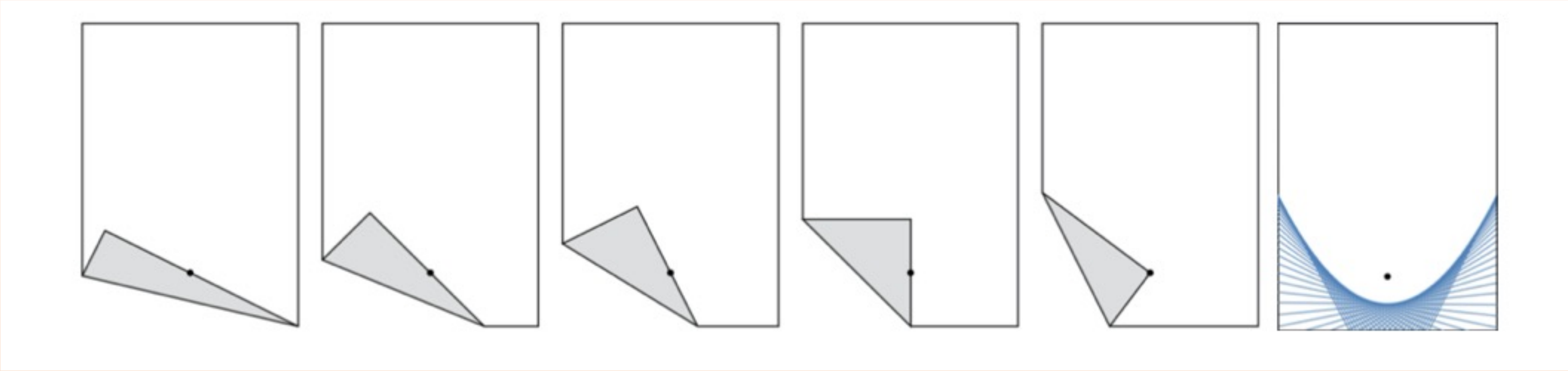
O5: Dati due punti *P e Q* e una retta *r*, esiste una piegatura passante per *Q* che porti P su *r*

Interpretazione geometrica della piega O5

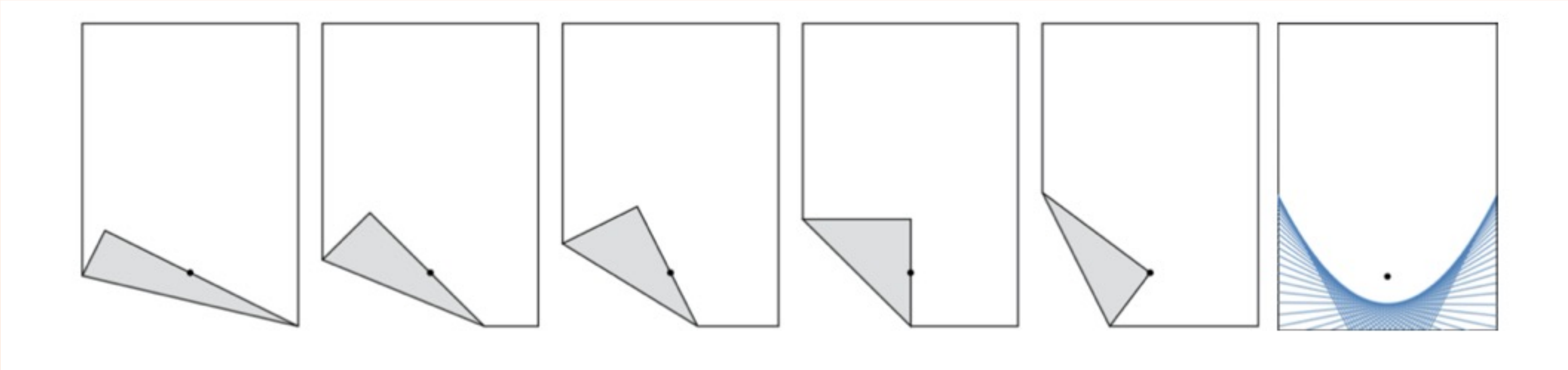




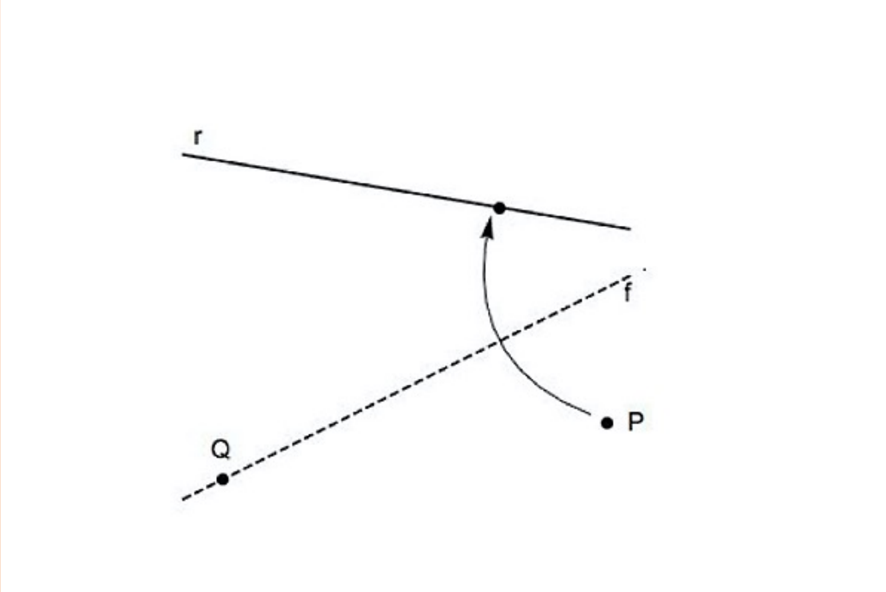
Interpretazione geometrica della piega O5



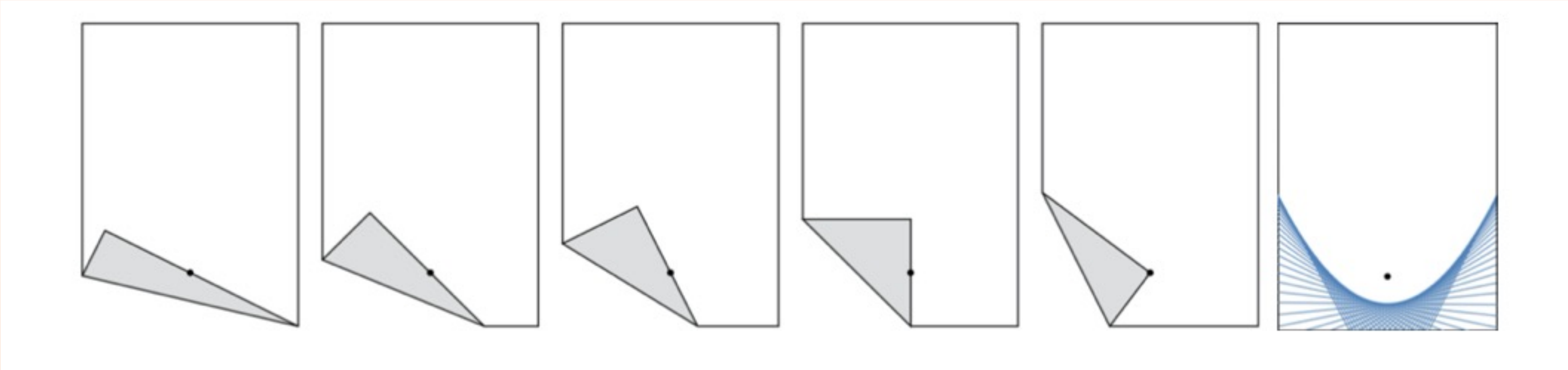
Interpretazione geometrica della piega O5



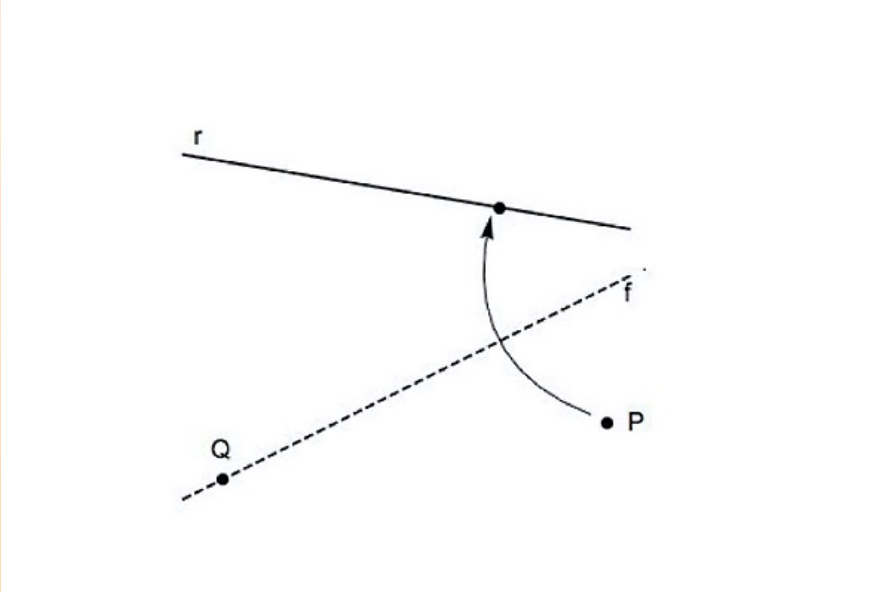
La retta r è il bordo del foglio

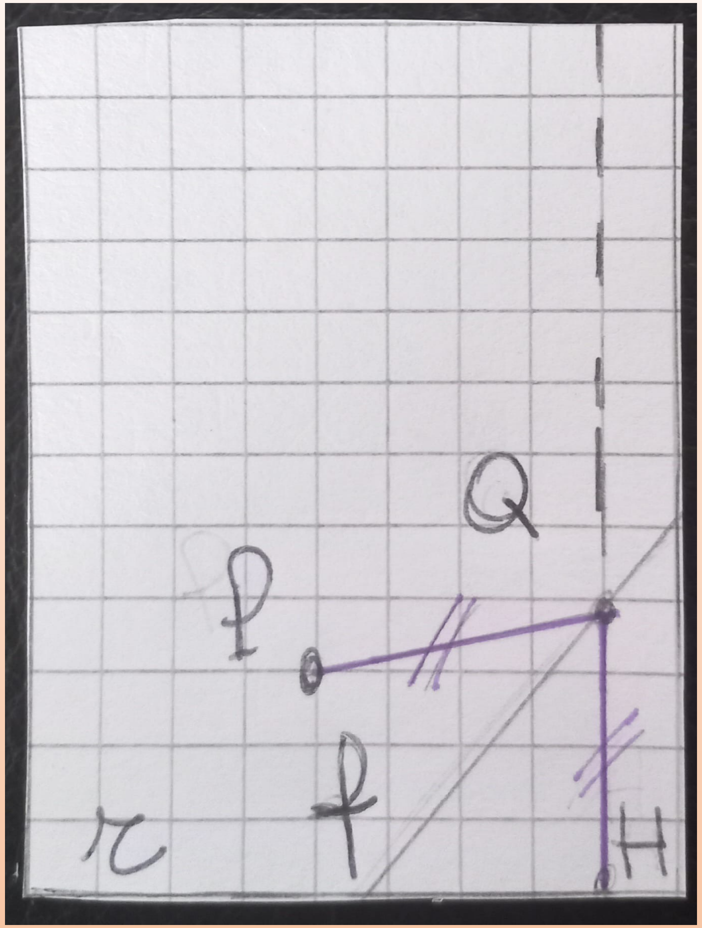


Interpretazione geometrica della piega O5



la linea che si piega è la retta tangente in Q alla parabola con fuoco in P e direttrice r, il bordo del foglio





- Sia **f** una piega ottenuta con il procedimento appena descritto, piegando P sulla retta r (direttrice). H è il punto di r individuato dalla piega f

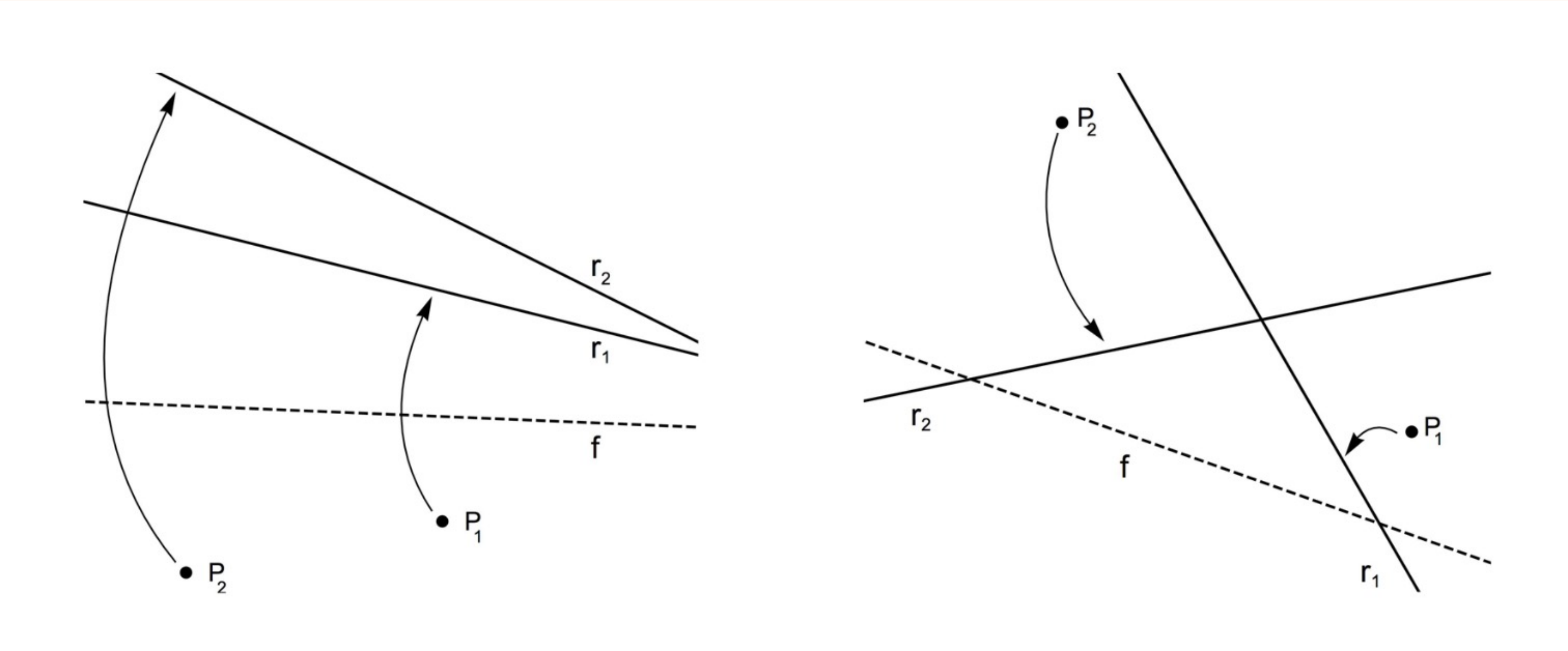
- Si osservi che **f** è l'asse del segmento HP, quindi tutti i suoi punti sono equidistanti da P e H.

- Si introduce la piega per H, perpendicolare ad r (tratteggiata, in figura)

- Il punto Q è l'intersezione di questa piega con **f** , quindi è equidistante da P e H, e la distanza QH è la corretta distanza tra P e la direttrice stessa, perché QH è ortogonale ad r

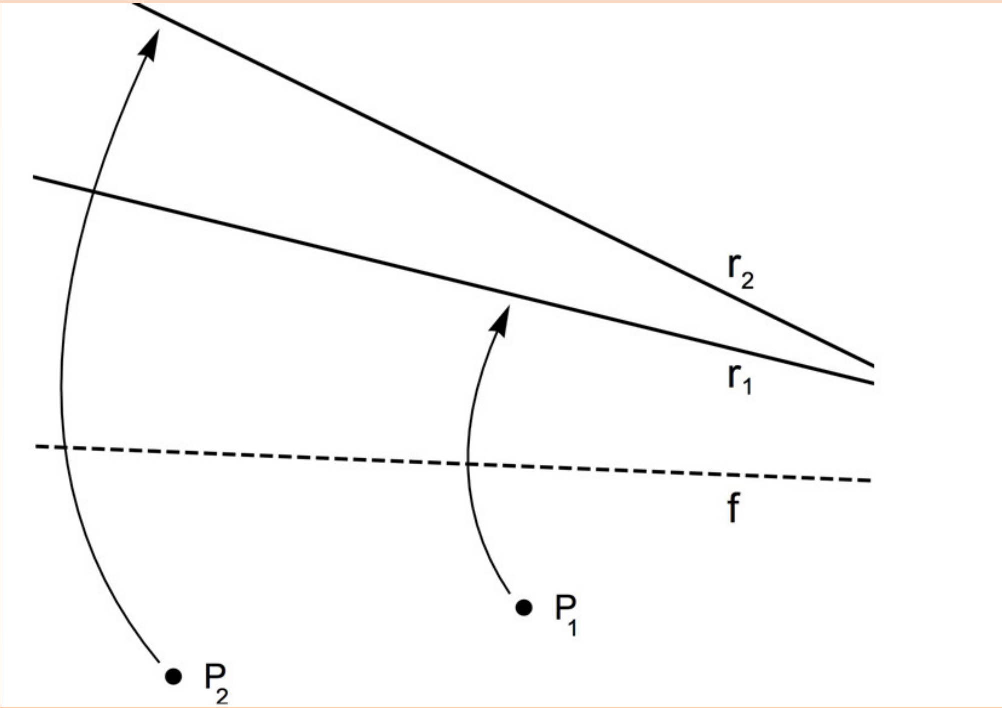
- Dalla relazione QH = QP, e ricordando la definizione di parabola, si deduce che il punto Q appartiene alla parabola di fuoco P e direttrice r ed **f** è la retta tangente a tale parabola

O6 la piega Beloch



Dati due punti p_1 e p_2 e due rette r_1 e r_2, esiste una piegatura che porti p_1 su r_1 e p_2 su r_2.

In O6 ci sono due punti dati e due rette date, quindi ci sono due parabole identificate: la piega produce una retta tangente ad entrambe le curve, quando la piega è possibile.



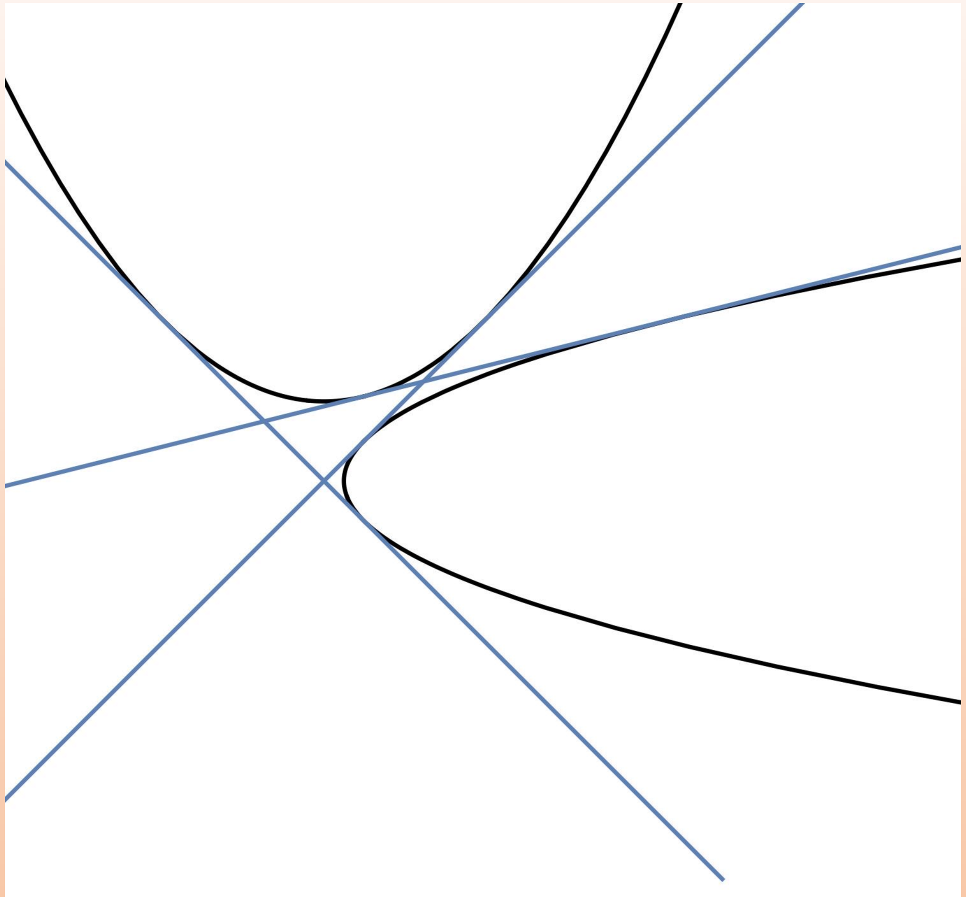
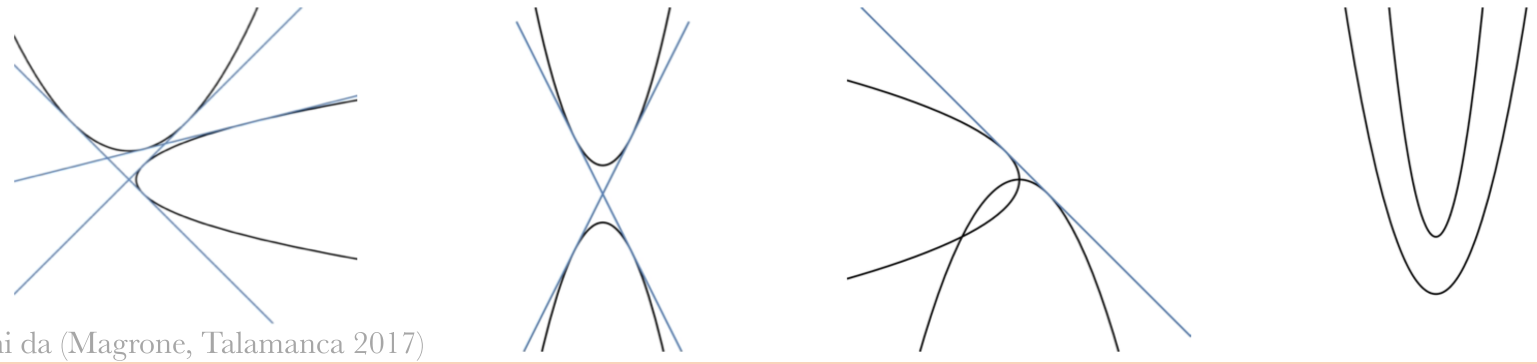


Immagine da (Magrone, Talamanca 2017)

Due parabole con tre tangenti in comune



Immagini da (Magrone, Talamanca 2017)

Diverse possibilità di tangenti comuni a due parabole. L'immagine a destra mostra una caso in cui non è possibile trovarne.

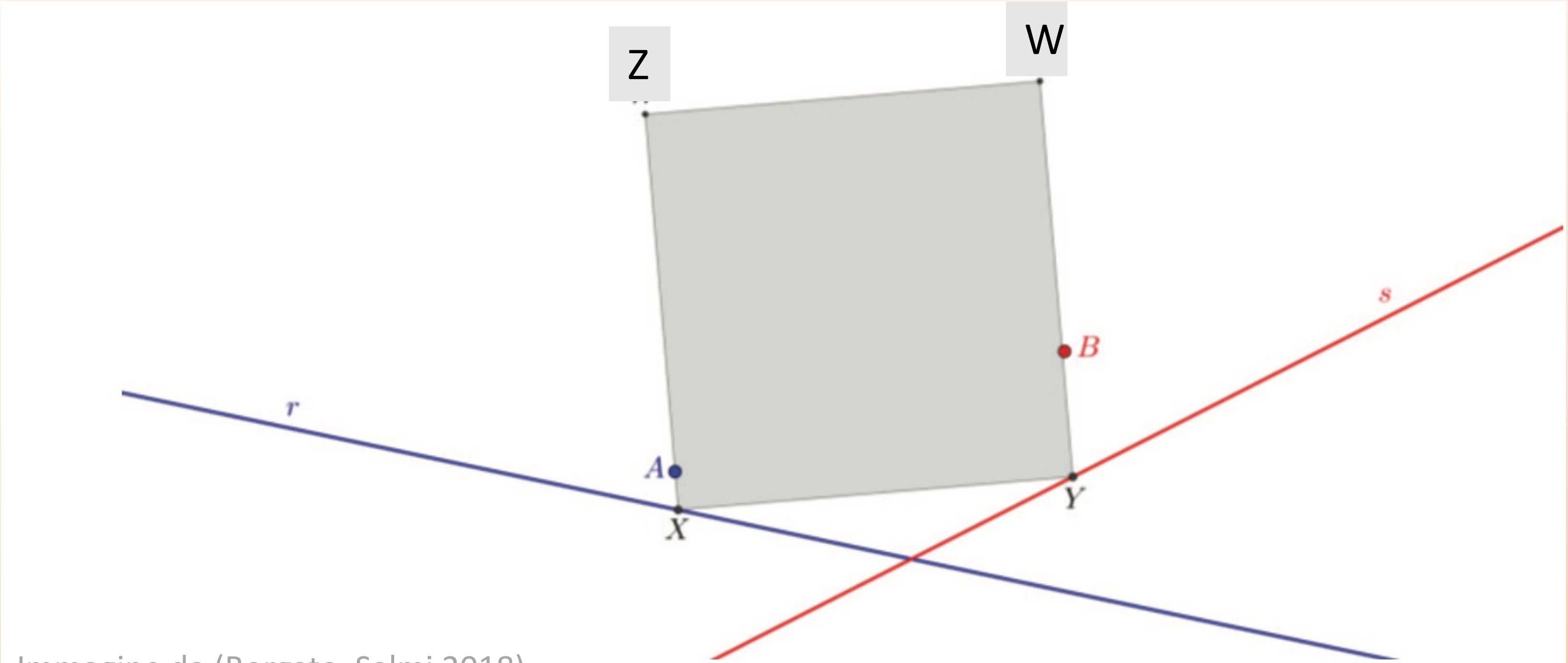
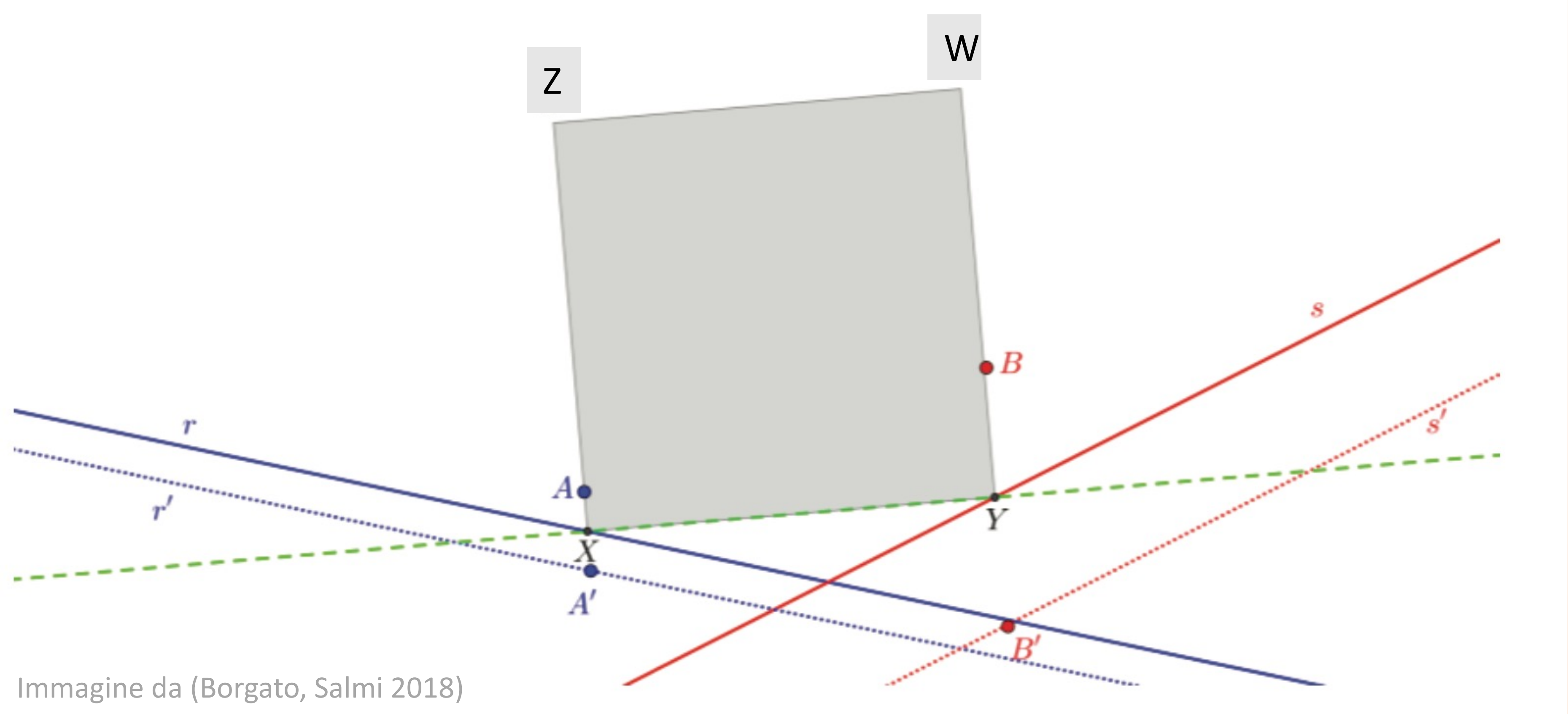


Immagine da (Borgato, Salmi 2018)

Per trovare le radici di polinomi qualunque, e in particolare di terzo grado, dobbiamo passare per questa costruzione:

Dati due punti A e B e due rette r ed s, costruire un quadrato di vertici X, Y, W e Z tale che X e Y giacciano su r ed s, e A (rispettivamente B) giaccia sulla retta che congiunge X e Z (rispettivamente Y e W).

La costruzione di questo è la chiave per costruire soluzioni di problemi di terzo grado piegando la carta. In che modo la piega di Beloch è collegata a questo quadrato?



Introduciamo due pieghe ausiliarie: r’ ed s’

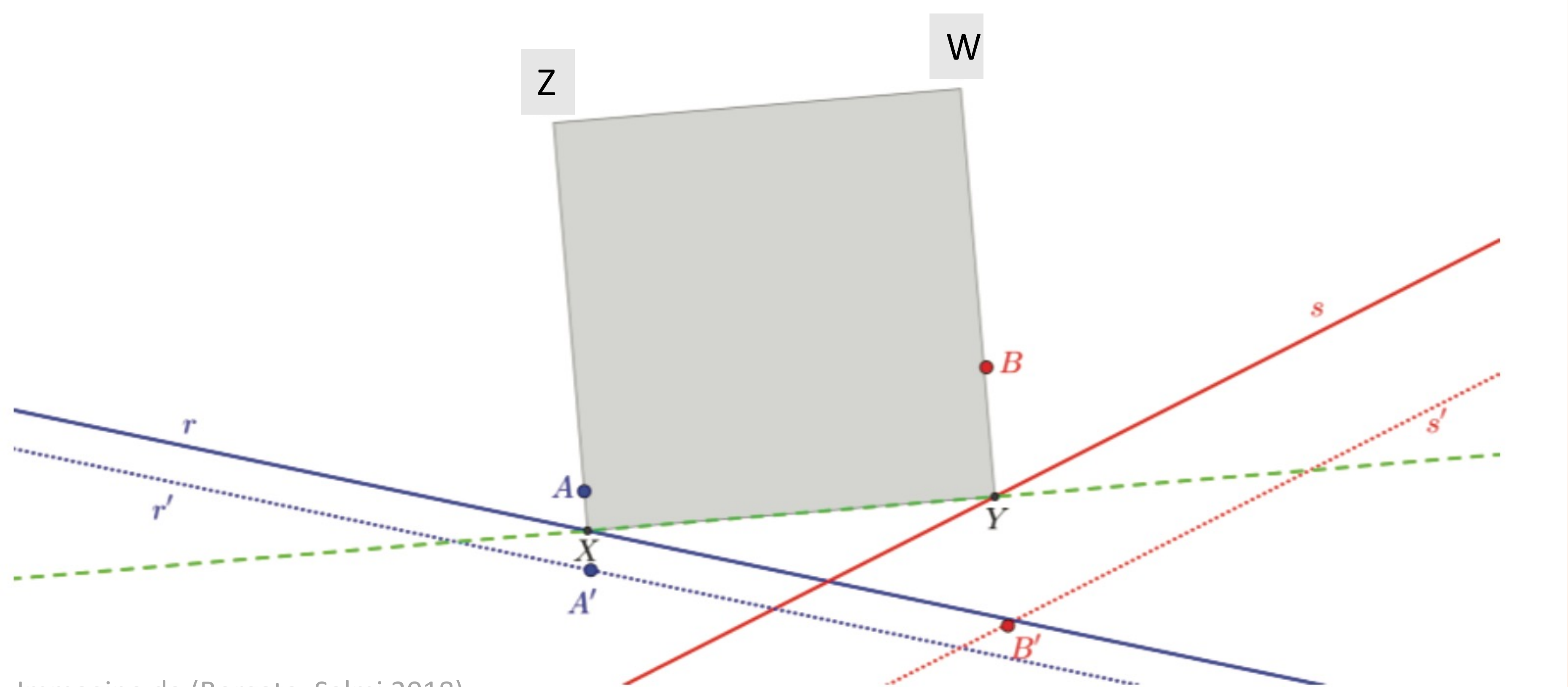


Immagine da (Borgato, Salmi 2018)

Si effettua la piega Beloch con i punti A e B e le rette r’ ed s’.
La piega in verde, è asse dei segmenti AA’ e BB’, quindi è perpendicolare, per costruzione, a tali segmenti. Prolungandoli (sempre utilizzando le pieghe) si costruiscono i lati del quadrato.

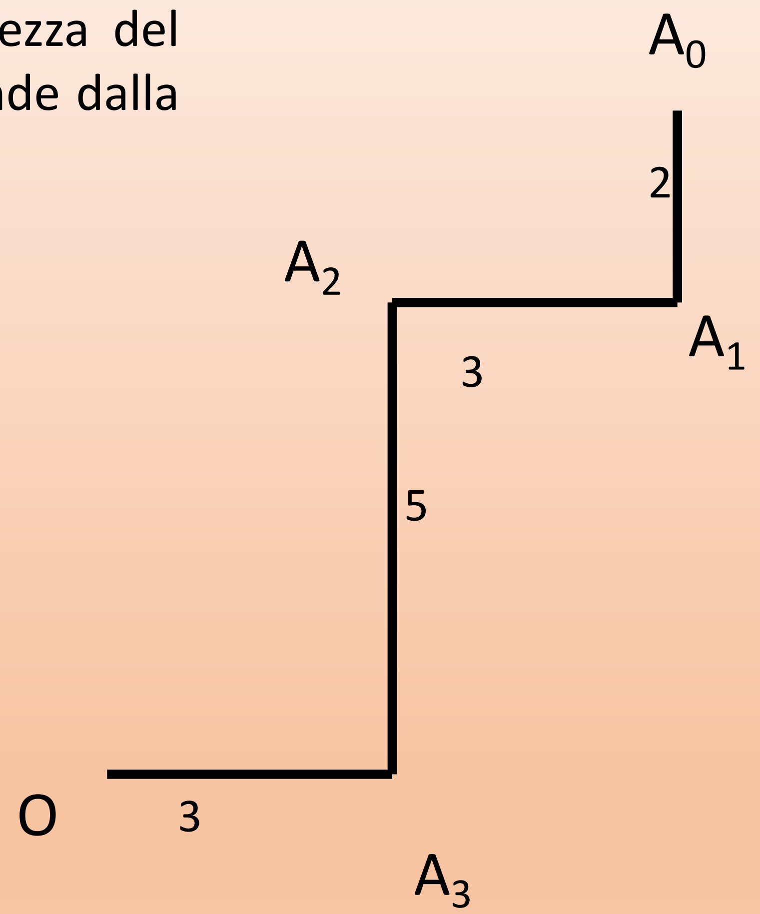
Metodo di Eduard Lill (1830-1900): procedimento grafico per la risoluzione di equazioni algebriche di grado qualunque

↓

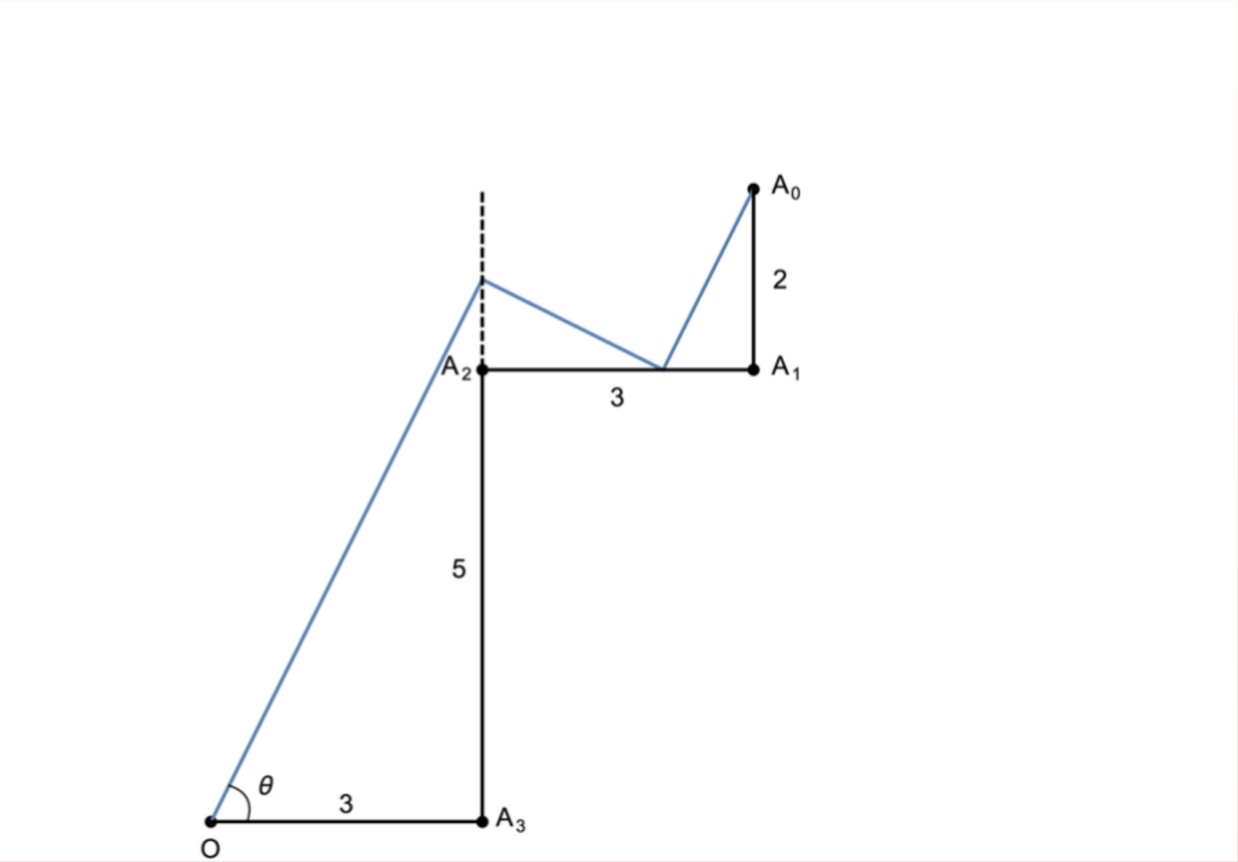
Il quadrato Beloch permette di riprodurre la risoluzione grafica, mediante le piegature.

$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Consideriamo la *catena poligonale* a 4 spigoli O-A3-A2-A1-A0, con soli angoli retti, dove il punto di partenza è l'origine O, la lunghezza del segmento che termina in Ai è |ai| il verso in cui si «gira» dipende dalla combinazione dei segni dei coefficienti

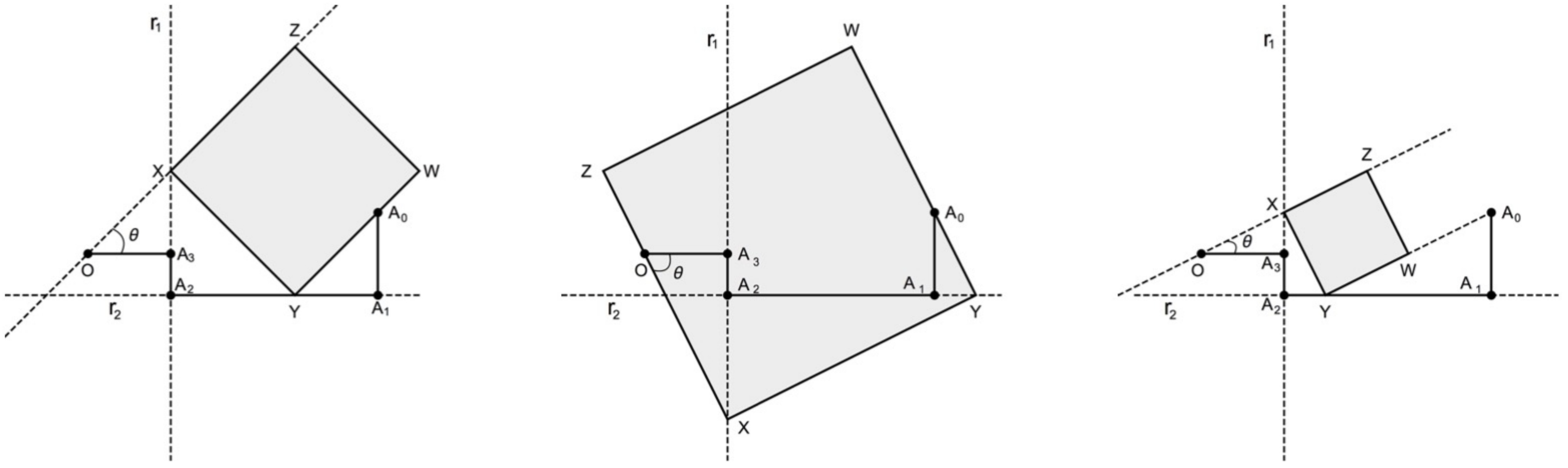


$P(x) = 3x^3 \; -5x^2 -3x + 2$



Tan (θ)= 2 è una radice di $3x^3-5x^2-3x+2$

Immagini da (Magrone, Talamanca 2017)



a $\alpha = 1$ b $\alpha = -2$ c $\alpha = \frac{1}{2}$

$$P(x) = x^3 - 1/2x^2 + 5/2\,x + 1$$

A partire dalla poligonale associata al polinomio, pieghiamo il quadrato Beloch: i punti saranno O e A_0. Una retta, r_1, è quella che congiunge A_3 con A_2, e la seconda, r_2, congiunge A_2 con A_1. Ovviamente come abbiamo visto prima, le pieghe possibili possono essere tre, come in questo caso. Il quadrato Beloch riproduce il cammino risolutivo di Lill.

Bibliografia

- **M.T. Borgato, R. Salmy** (2018), La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche, *Periodico di Matematica*, 3, pp. 57-71.
- **P. Magrone** (2021), Margherita Piazzolla Beloch in the Italian Mathematics education tradition, in P. Magnaghi et al. (ed.) *Faces of Geometry* 2, pp. 209-222. Springer, Cham.
- **P. Magrone**, **M. L. Spreafico** (2022) Nuovi approcci nei corsi di Matematica per l'Architettura: connettere forme e formule in geometria attraverso esperienze laboratoriali, *Annali online della Didattica e della Formazione Docente,* Vol. 14, n. 24, pp. 99-122.
- **P. Magrone**, **V. Talamanca** (2017), Folding cubic roots: Margherita Piazzolla Beloch's contribution to elementary geometric constructions. In L. Balko et al (eds.), *Proceedings, 16th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2017*, Slovak University of Technology in Bratislava, pp. 971-984. Publishing house Spektrum STU, Bratislava.
- **M. Piazzolla Beloch** (1934), Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row, Atti dell'Acc. di Scienze Mediche. Naturali e Matematiche di Ferrara Serie II, XI:196–189
- **M. Piazzolla Beloch** (1936), Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici, *Periodico di Matematica*, 16, pp. 104-108.
- **Sundara Row** (1893), *Geometric exercises in paper folding,* Addison and Co., Madras.

Grazie per l'attenzione