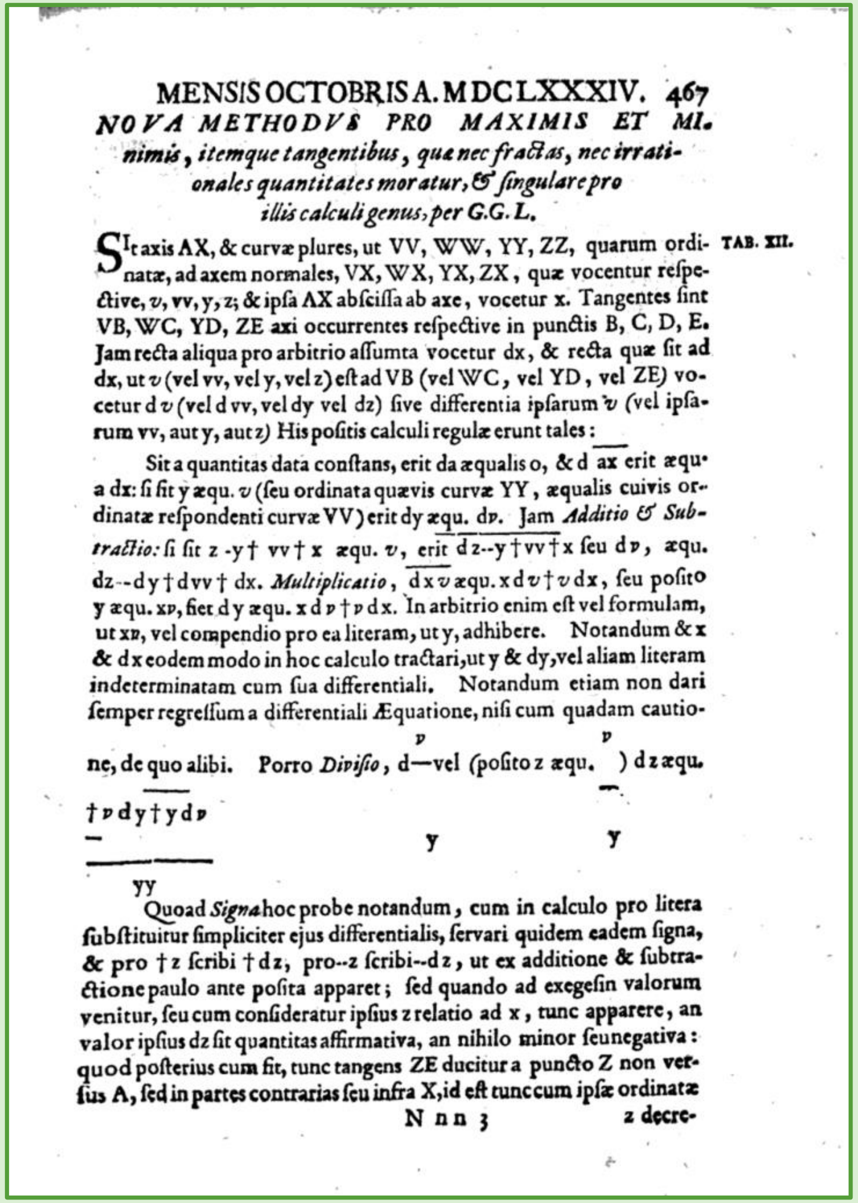
Convegno *Matematica e Storia negli insegnamenti matematici*

La disseminazione del calcolo infinitesimale in Italia: i *Principj di Analisi Sublime* di Lagrange

Maria Giulia Lugaresi (Università di Ferrara)


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

TAB. XII.

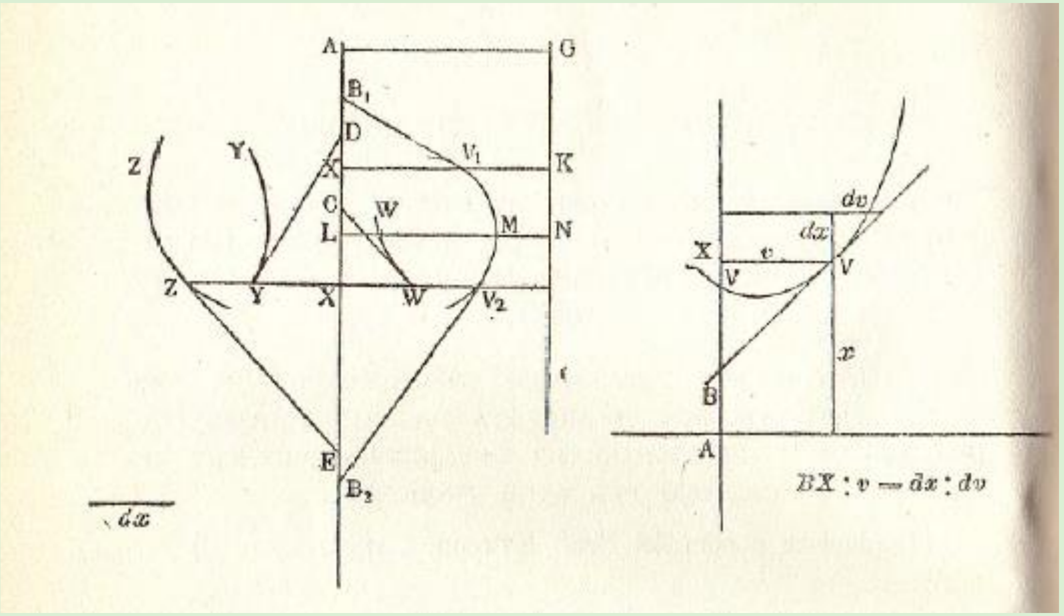
SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d v (vel d vv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z -y † vv † x æqu. v, erit dz--y † vv † x seu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dxv æqu. x dv † v dx, seu posito y æqu. xv, fiet d y æqu. x d v † v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) d z æqu. $\frac{\mp v\,dy \pm y\,dv}{yy}$

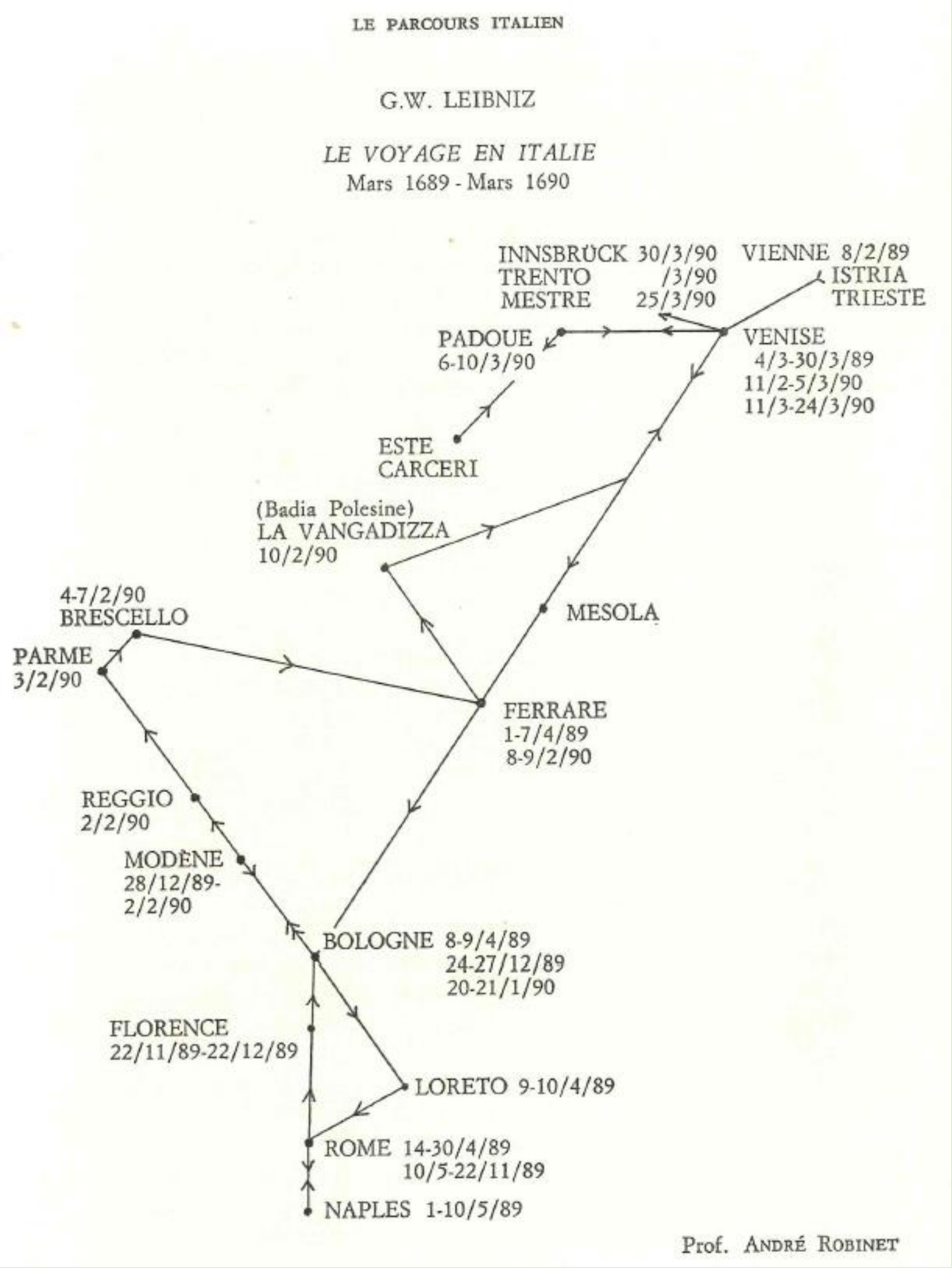
Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro † z scribi † d z, pro--z scribi--d z, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

G. W. Leibniz, ***Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus***, Acta Eruditorum, 1684.



Il viaggio di Leibniz in Italia (marzo 1689 - marzo 1690)



Robinet A., *G. W. Leibniz Iter Italicum mars 1689-mars 1690*, Olschki, 1988

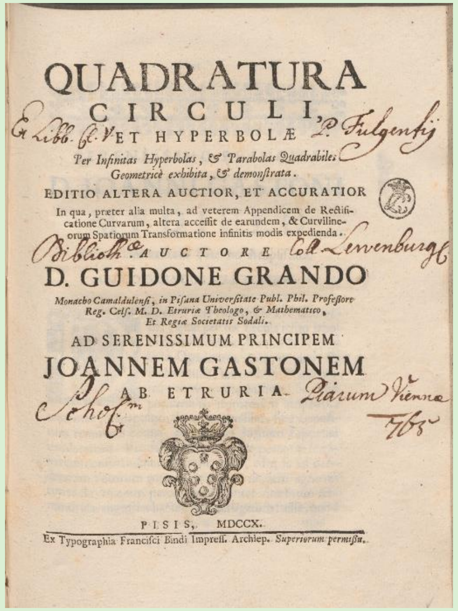
La tradizione leibniziana in Italia

Guido Grandi

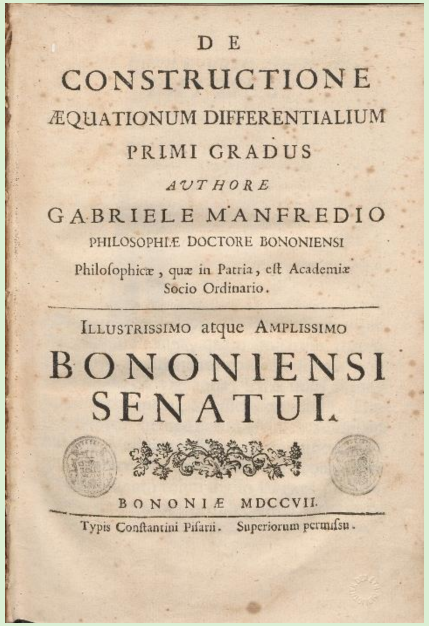
Gabriele Manfredi

Jacopo Riccati

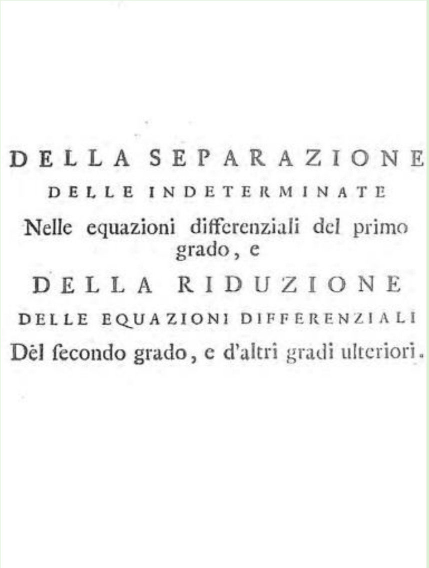
Michelangelo Fardella



QUADRATURA
CIRCULI,
ET HYPERBOLÆ
Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles
Geometricè exhibita, & demonstrata.
EDITIO ALTERA AUCTIOR, ET ACCURATIOR
In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilineorum Spatiorum Transformatione infinitis modis expedienda.
AUCTORE
D. GUIDONE GRANDO
Monacho Camaldulensi, in Pisana Universitate Publ. Phil. Professore Reg. Cels. M. D. Etruriæ Theologo, & Mathematico, Et Regiæ Societatis Sodali.
AD SERENISSIMUM PRINCIPEM
JOANNEM GASTONEM
AB ETRURIA.
PISIS, MDCCX.
Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiep. Superiorum permissu.



DE
CONSTRUCTIONE
ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM
PRIMI GRADUS
AUTHORE
GABRIELE MANFREDIO
PHILOSOPHIÆ DOCTORE BONONIENSI
Philosophicæ, quæ in Patria, est Academiæ Socio Ordinario.
ILLUSTRISSIMO atque AMPLISSIMO
BONONIENSI
SENATUI.
BONONIÆ MDCCVII.
Typis Constantini Pisarii. Superiorum permissu.



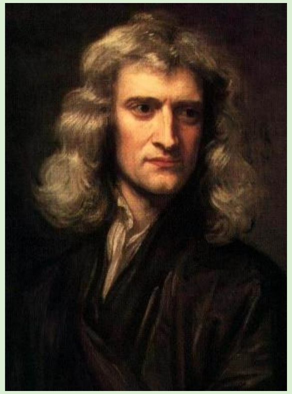
DELLA SEPARAZIONE
DELLE INDETERMINATE
Nelle equazioni differenziali del primo grado, e
DELLA RIDUZIONE
DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI
Del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori.

441

INDICE

PARTE PRIMA
Dei metodi inventati da varj celebri Autori per separare le indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado.
PARTE SECONDA
Dei metodi inventati dall' Autore per separare le indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado.
PARTE TERZA
Della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado.
APPENDICE PRIMA
Della maniera di evitare le seconde, e le ulteriori differenze.
APPENDICE SECONDA
Della riduzione delle equazioni differenziali del terzo grado.

Newton e le *“ultime ragioni di quantità evanescenti”*



Il calcolo infinitesimale di Newton ha tre redazioni principali:

- *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta nel 1669, ma pubblicata solo nel 1711
- *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, in cui compare la terminologia e la notazione tipica delle flussioni, redatta tra il 1670 ed il 1671 e pubblicata postuma nel 1742.

indicate con $\dot{x}, \dot{y}$

*Le quantità x, y generate tramite un flusso sono chiamate **fluenti**, le velocità istantanee sono chiamate **flussioni**, i momenti delle quantità fluenti sono gli infinitamente piccoli addendi tramite cui quelle quantità crescono durante ciascun intervallo infinitamente piccolo di tempo.*

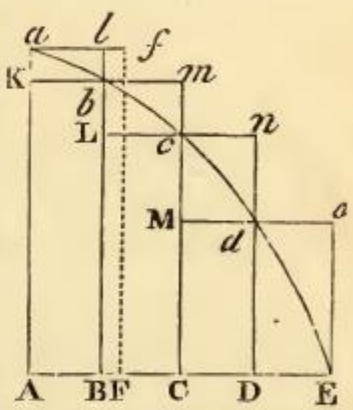
indicati con $\dot{x}o, \dot{y}o$

- *De quadratura curvarum*, in cui si trova il metodo delle prime ed ultime ragioni, pubblicato nel 1704.

Newton e il metodo delle «prime e ultime ragioni»

LEMMA II.

If in any figure AacE, *terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE, *there be inscribed any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c., comprehended under equal bases* AB, BC, CD, *&c., and the sides*, Bb, Cc, Dd, *&c., parallel to one side* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c., are completed. Then if the breadth of those parallelograms be supposed to be diminished, and their number to be augmented* in infinitum; *I say, that the ultimate ratios which the inscribed figure* AKbLcMdD, *the circumscribed figure* AalbmcndoE, *and curvilinear figure* AabcdE, *will have to one another, are ratios of equality.*



For the difference of the inscribed and circumscribed figures is the sum of the parallelograms K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, that is (from the equality of all their bases), the rectangle under one of their bases K*b* and the sum of their altitudes A*a*, that is, the rectangle AB*la*. But this rectangle, because its breadth AB is supposed diminished *in infinitum*, becomes less than any given space. And therefore (by Lem. I) the figures inscribed and circumscribed become ultimately equal one to the other; and much more will the intermediate curvilinear figure be ultimately equal to either. Q.E.D.

Lemma II. *Se in una figura qualsiasi, **AacE**, delimitata dalle rette Aa, AE e dalla curva acE, vengono inscritti un numero qualsiasi di parallelogrammi Ab, Bc, Cd, … con le basi AB, BC, CD, … uguali, e con i lati Bb, Cc, Dd, … paralleli al lato Aa della figura e si completano i parallelogrammi aKbl, bLcm, cMdn, …, allora, se la larghezza di questi parallelogrammi diminuirà e il loro numero aumenterà all'infinito, dico che **le ultime ragioni** che fanno tra di loro la figura inscritta **AKbLcMdD**, quella circoscritta **AalbmcndoE**, e quella curvilinea **AabcdE** **sono ragioni di uguaglianza**.*

Newton, *Principia*, Section 1, Book 1.

J. L. Lagrange, *Principj di Analisi Sublime* (~1754)

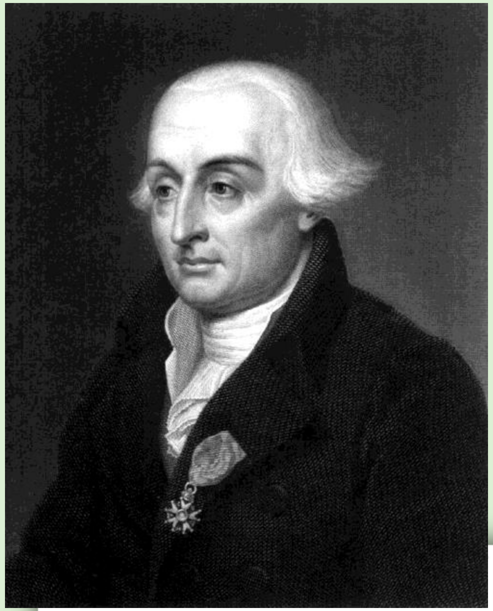
Il calcolo differenziale

Nella seconda parte dei ***Principj*** Lagrange sviluppa il calcolo algebrico delle differenze finite. Il calcolo differenziale determina «le ultime ragioni della differenza *dy/dx, cioè gli ultimi termini a cui i rapporti generali delle differenze continuamente si avvicinano, mentre queste continuamente decrescono*».

1°. Tutte le quantità variabili crescono, o diminuiscono continuamente, oppure prima crescono e poi diminuiscono, o viceversa, come

Quella quantità indeterminata, di cui una variabile qualunque si concepisce che aumenti, o diminuisca, dicesi generalmente la sua differenza, e si dinota ordinariamente per la lettera d prefissa all'espressione della variabile medesima. Così dx, dy, dz etc: esprimeranno le differenze delle variabili x, y, z etc: di maniera che x divenendo x+dx, y et z divengono y+dy, z+dz.

Differenza di una quantità indeterminata



Giuseppe Luigi Lagrange

PRINCIPJ DI ANALISI SUBLIME

Edizione a cura di
Maria Teresa Borgato

La notazione di Lagrange è quella leibniziana, ma l'approccio è newtoniano.

56r Le regole generali di queste tali operazioni, e della maniera di applicarle alla risoluzione dei casi particolari che occorrer possono costituiranno questa seconda parte dell'*Analisi sublime*, la quale conterrà perciò la Teoria del calcolo, che si chiama comunemente col nome di *Calcolo delle differenze*, o sia *Calcolo differenziale*.

Questi tali rapporti delle differenze si chiamano ultimi rapporti delle differenze, considerandole nel punto in cui esse stanno per isvanire. Veramente questi tali rapporti non sono rapporti di verune differenze reali, poiché si suppone che ciascheduna di esse sia divenuta uguale al zero; esprimono bensì solamente gli ultimi termini, a cui i rapporti generali delle differenze continuamente si avvicinano mentre che queste si fanno continuamente diminuire. Questi rapporti chiamansi ancora primi rapporti delle differenze, imperocché si possono riguardar egualmente come i limiti da cui partono i rapporti generali delle differenze considerate come nascenti || per ricevere poi continue aumentazioni. 65v

Definizione di ***ultimi rapporti delle differenze***

Quindi è che per Calcolo Differenziale puramente detto s'intende comunemente quello, che determina li ultimi rapporti delle differenze; e similmente espressioni differenziali, od equazioni differenziali si appellano quelle, che somministrano i detti rapporti.

Definizione di ***calcolo differenziale***

18º. Le differenze, che abbiamo sin qui esaminate appartengono alle quantità algebraiche; nella Geometria esse si determinano molto più facilmente; imperciocché basta supporre che ciascheduna delle linee, che hanno fra di loro un dato rapporto si muti continuamente di posizione, in maniera però che non vengano distrutte le condizioni, che l'ipotesi del Problema richiede, e gli accrescimenti, o le diminuzioni che desse linee in questa maniera riceveranno necessariamente, esprimeranno le loro differenze positive, o negative, le quali si douranno perciò determinare co' principi comuni della Geometria; come si è già veduto, § 3º 4º 5º, e si vedrà ancora in seguito molto più ampiamente.

Ora siccome abbiamo ritrouato nelle espressioni delle differenze algebraiche certi limiti ne' loro rapporti; tali limiti douranno anche esistere ne' rapporti delle differenze geometriche, che alle algebraiche corispondono; e per ritrovarli si terrà un metodo analogo a quello che abbiamo sin qui usato nelle espressioni algebraiche, cioè si supporrà primieramente che le differenze siano prodotte, e si ricercheranno i loro rapporti supponendo, che diminuiscano esse continuamente sino a suanire del tutto, cioè che linee variabili ritornino nella loro prima situazione. In cotal guisa se si prendano a dirittura per uguali quelle quantità di cui la differenza || si vede dovere svanire, si potranno senza veruna 66r
difficoltà scuoprire i limiti ricercati.

Differenze di quantità algebriche e geometriche

La differenza finita di $\frac{x}{y}$

10°. Sieno in terzo luogo le variabili divise le une per le altre per esempio debbasi prendere la differenza di $\frac{x}{y}$ posto $x+\mathrm{d}x$ in luogo di x, e $y+\mathrm{d}y$ in luogo di y, questa frazione diverrà $\frac{x+\mathrm{d}x}{y+\mathrm{d}y}$, da cui sottraendo $\frac{x}{y}$ si aurà $\frac{x+\mathrm{d}x}{y+\mathrm{d}y}-\frac{x}{y}$ per la differenza ricercata.

Riducansi queste due frazioni alla medesima denominazione e ne risulterà $\frac{yx+y\mathrm{d}x-xy-x\mathrm{d}y}{y(y+\mathrm{d}y)}=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y(y+\mathrm{d}y)}=\mathrm{d}\cdot\frac{x}{y}$.

$x \longrightarrow x+dx$

$f(x) \longrightarrow f(x+dx) \Longrightarrow f(x+dx)-f(x)$

$$\boxed{\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}}$$

$$\Big\downarrow\ dy=0$$

$$\boxed{\frac{ydx-xdy}{y^2}}$$

Il differenziale di $\frac{x}{y}$

3°. La frazione $\frac{x}{y}$ ha per la sua differenza finita l'espressione 67v
$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y(y+\mathrm{d}y)}$, § 9°[80], che paragonata colla formula $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ dà $P=\frac{y}{y(y+\mathrm{d}y)}$, $Q=\frac{-x}{y(y+\mathrm{d}y)}$, e fatto il $\mathrm{d}y=0$, $P=\frac{y}{y^2}$; $Q=-\frac{x}{y^2}$; onde si ricava il differenziale di $\frac{x}{y}$ eguale $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}$ dal che ne segue la regola generale per le frazioni, cioè, che

La differenza di una frazione qualunque è uguale al prodotto della differenza del numeratore nel denominatore meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, il tutto diviso pel quadrato del denominatore.

Leggere il brano tratto dai *Principi di Analisi Sublime* relativo al calcolo della differenza finita e del differenziale di $\frac{x}{y}$.

Sia proposta una funzione qualunque algebraica delle variabili x, y, z … e si dinoti come $F(x, y, z)$*; suppongasi che le variabili le quali in essa contengonsi vengano a crescere delle loro differenze* dx, dy, dz …. *Sicché esse diventino* $x + dx, y + dy, z + dz$ … *e la funzione proposta dovrà parimenti mutarsi in* $F(x + dx, y + dy, z + dz)$ *dalla quale sottraendo la prima rimarrà per la sua differenza ricercata* $F(x + dx, y + dy, z + dz) - F(x, y, z)$.

10°. Sieno in terzo luogo le variabili divise le une per le altre per esempio debbasi prendere la differenza di $\frac{x}{y}$ posto $x+dx$ in luogo di x, e $y+dy$ in luogo di y, questa frazione diverrà $\frac{x+dx}{y+dy}$, da cui sottraendo $\frac{x}{y}$ si aurà $\frac{x+dx}{y+dy}-\frac{x}{y}$ per la differenza ricercata.

Riducansi queste due frazioni alla medesima denominazione e ne risulterà $\frac{yx+ydx-xy-xdy}{y(y+dy)}=\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}=d\cdot\frac{x}{y}$.

3°. La frazione $\frac{x}{y}$ ha per la sua differenza finita l'espressione $\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}$, § 9°(80), che paragonata colla formula $Pdx+Qdy$ dà $P=\frac{y}{y(y+dy)}$, $Q=\frac{-x}{y(y+dy)}$, e fatto il $dy=0$, $P=\frac{y}{y^2}$; $Q=-\frac{x}{y^2}$; onde si ricava il differenziale di $\frac{x}{y}$ eguale $\frac{ydx-xdy}{y^2}$ dal che ne segue la regola generale per le frazioni, cioè, che 67v

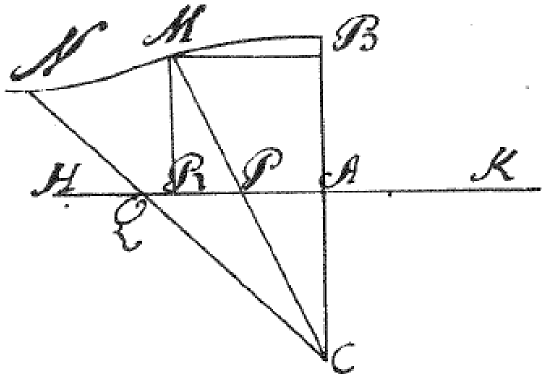
La differenza di una frazione qualunque è uguale al prodotto della differenza del numeratore nel denominatore meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, il tutto diviso pel quadrato del denominatore.

Riscrivere i passaggi sviluppati da Lagrange nel linguaggio moderno.

Rileggi il testo e individua l'operazione aritmetica usata per giungere alla definizione di derivata secondo Lagrange.

La costruzione della Concoide di Nicomede

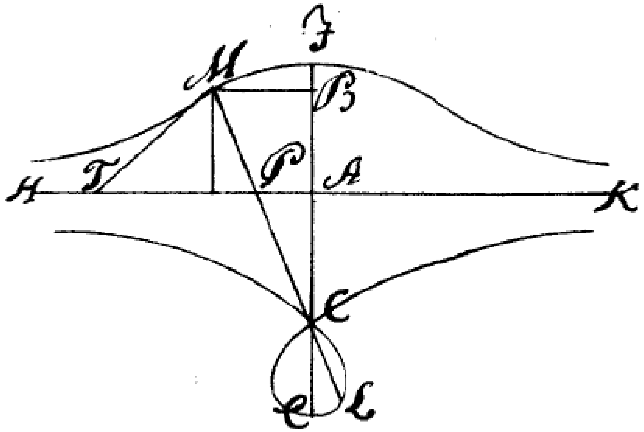
24°. Sia preso un punto qualunque C, da cui sieno tirate infinite rette CM, CN, etc: le quali intersechino una retta indefinita HAK di data posizione ne' punti P, Q etc: si taglino le parti PM, QN sempre uguali fra di loro, ed i punti M, N saranno ad una curva che chiamasi *Concoide di Nicomede*, in cui il punto C dicesi *Polo*.



Per ridurre questa curva ad una equazione algebraica tirisi dal punto C la CAB perpendicolare ad HK e da un punto qualunque M di quei che ad essa Curva appartengono tirinsi le due rette MR ed MB parallele alle AB ed AH e si tiri AR per una ascissa x ed MR per l'ordinata corispondente y. Chiamisi inoltre la distanza CA$=a$ la lunghezza costante MP$=b$, e ne' triangoli simili RMP, MBC si aurà RP : RM$=$MB : BC, cioè $\sqrt{b^2-y^2}$: $y=x$: $a+y$, e perciò

$$xy=a+y\sqrt{b^2-y^2}\ ^{(89)}.$$

Quindi si scorge che sendo la quantità b elevata al quadrato questa
72r equazione sarà vera sia che il b sia positivo, sia che desso || sia negativo, d'onde ne segue che la curva dourà aver due rami, uno disopra l'asse, che verrà generato, pigliando le distanze MP sopra l'asse sempre uguali alla costante b, e l'altro che si descriverà al di sotto dello stesso asse col tagliare dalla medesima retta MPC prolungata la distanza CL[90] eguale pur anco alla data quantità b, onde tutta la curva aurà la qui segnata figura, ove la retta HK è assintotica ad amendue i rami sopra, e sotto.



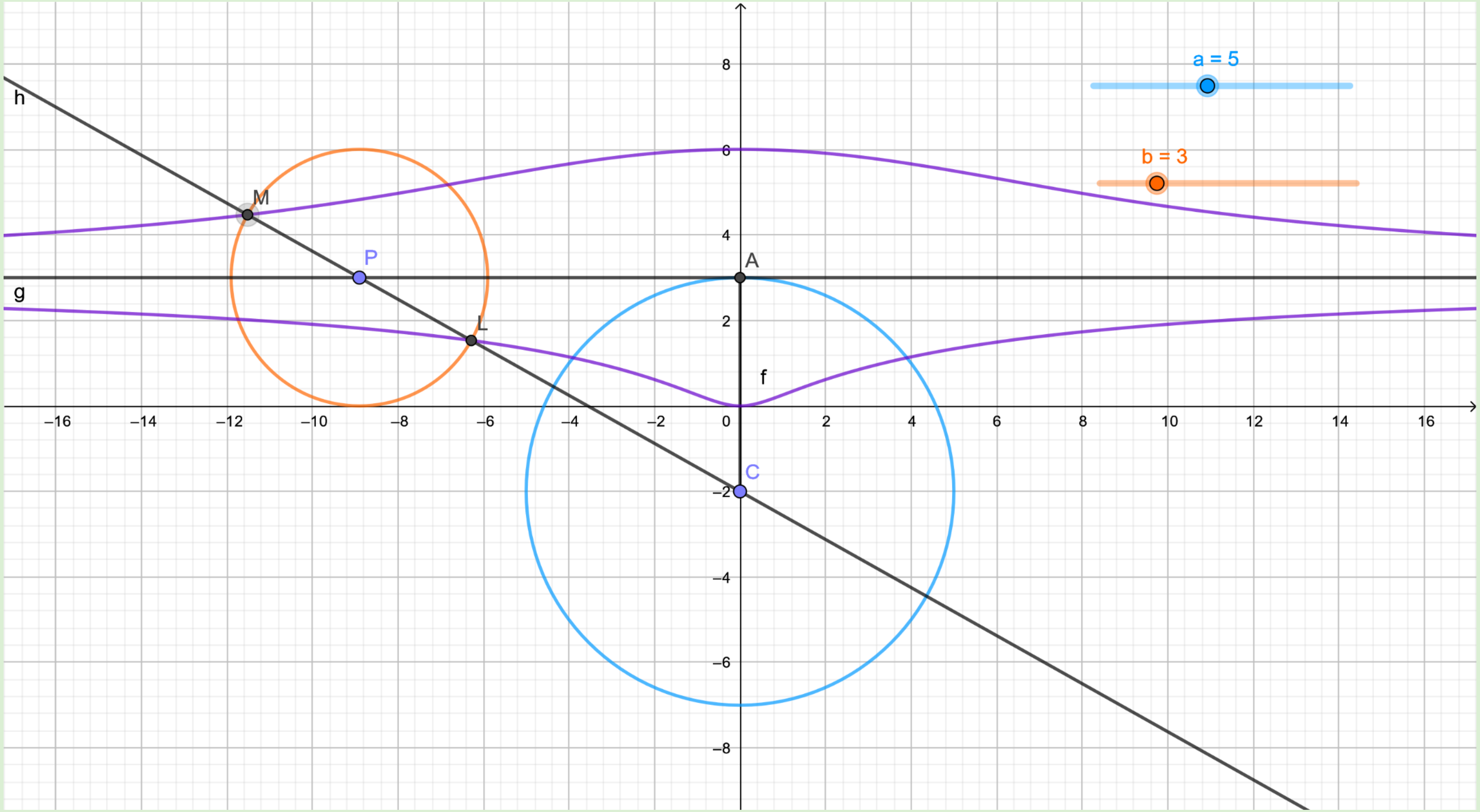
Lagrange spiega come ottenere l'equazione della concoide, a partire dalla sua costruzione geometrica.

Dalla similitudine tra i triangoli RMP, MBC si ha che $RP : RM = MB : BC$ $\Rightarrow$ $\sqrt{b^2-y^2} : y = x : (a+y)$

$\Rightarrow$ $xy = (a+y)\sqrt{b^2-y^2}$

La costruzione della Concoide di Nicomede con GeoGebra

Una possibile attività in classe

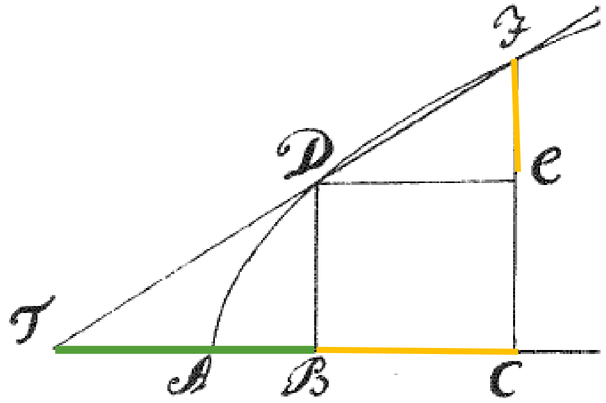


Muovere col puntatore gli slider *a, b*. Cosa si può osservare nella curva?

https://www.geogebra.org/m/g5yyjku4

La ricerca della tangente ad una curva data

Sia proposta una curva qualunque ADF, di cui si abbia l'equazione tra le coordinate x e y.



Sia AB un Ascissa qualunque, BD l'applicata corrispondente. Suppongasi, che l'ascissa AB cresca di una differenza finita BC l'applicata BD dourà venir nella posizione CF, e crescere parimenti di una differenza uguale FE; posto che dal punto D siasi tirata la retta DE parallela a BC; si conduca per i punti D, F la retta segante FD, che incontri la direttrice delle ascisse in T, e per i triangoli simili TDB, DFE si aurà sempre FE : DE=DB : TB; onde $TB=DB \times \frac{DE}{FE}=\frac{ydx}{dy}$. Ora la differenza BC si supponga vada continuamente scemando sino a diventar $=0$ sinché il punto C venga a coincidere in B, l'applicata CF ritornerà nella sua primiera situazione e svanirà perciò la differenza FE, ed i due punti di curva D F si riuniranno in D, onde finalmente la segante FDT diverrà tangente allo stesso punto D. ||

22°. Quindi dunque ne segue, che in ogni punto di curva la tangente sarà quella che determina l'ultimo limite di tutte le seganti che per esso si possono condurre, di maniera che niun'altra retta pel punto del contatto possa passare che non seghi in qualche altro punto la detta curva. 69v

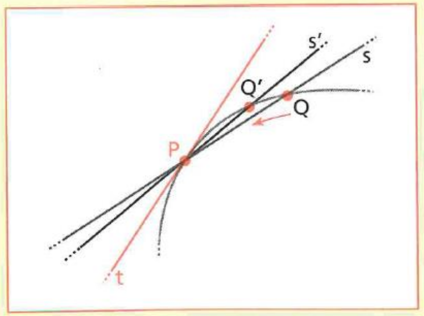
Siccome adunque la posizione delle seganti dipende generalmente dal rapporto delle due differenze DE ed FE, si aurà la posizione delle tangenti, riducendo questo rapporto al suo ultimo limite, come sin qui si è insegnato.

$$\boxed{TB = \frac{ydx}{dy}}$$

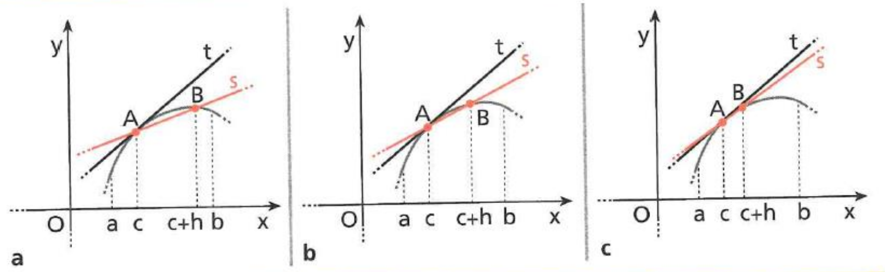
DEFINIZIONE

Retta tangente a una curva

La retta tangente t a una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della secante PQ al tendere (sia da destra che da sinistra) di Q a P.



Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$. Del grafico della funzione consideriamo i punti $A(c; f(c))$ e $B(c + h; f(c + h))$, con c e $c + h$ appartenenti all'intervallo.
Disegniamo la retta t tangente al grafico in A. Tracciamo inoltre la retta AB, secante il grafico, per diversi valori di h.



Attribuendo ad h valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando $h \to 0$ il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente alla curva in A. Il coefficiente angolare della secante AB, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente, che viene chiamato *derivata* della funzione nel punto c.

e) Un'analisi testuale del problema della tangente.

Confrontare i brani (libro di testo e P.A.S. di Lagrange) e individuare le seguenti parole chiave: "ultimo limite", "curva", "differenza finita", "coefficiente angolare", "continuamente scemando", "posizione limite", "retta segante/secante", "limite", "tende a", "funzione".

In quale testo compare il termine "funzione"? Qual è il termine corrispondente usato nell'altro testo?

____

Riscrivere in termini moderni la definizione data da Lagrange di tangente ad una curva in un punto

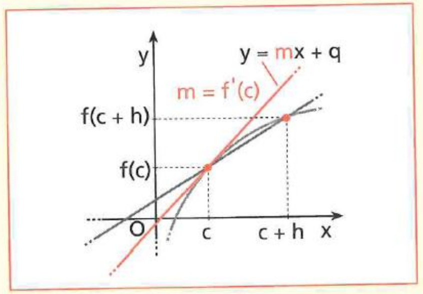
____

____

Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo il limite, se esiste ed è *finito*, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c e si indica con $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$



La derivata di una funzione in un punto c rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.

Il calcolo integrale

50°. Nel calcolo integrale si considerano, dati i rapporti delle differenze delle variabili, e si ricercano quelli delle variabili medesime come si è detto, § [6°][138], Le regole adunque di questo Calcolo derivano immediatamente da quelle del Calcolo differenziale, come nell'Algebra comune le regole della divisione e della estrazione delle radici si deducono da quelle della moltiplica, e della formazion delle potestà. Quindi per ritrovar l'integrale di una qualsivoglia differenziale data basterà ricercare una formula che differenziata secondo le date regole divenga la differenziale proposta.

Le integrazioni si dinotano comunemente colla lettera S prefissa alla formula differenziale da integrarsi, nella medesima maniera che le differenziazioni si esprimono per la pura lettera d. Così $S \cdot dx$ sarà l'integrale di dx e perciò sara $=x$, qualunque sia essa variabile x. Ma qui è da notarsi, che siccome nel differenziare una quantità, svaniscono sempre

le quantità costanti ad || essa aggiunte, così nello integrare un differen- 101r
ziale si potrà sempre aggiugnere all'integrale ritrovata una qualsivoglia costante, la quale verrà poi determinata ad arbitrio per via di qualche condizione particolare a cui si vorrà addattare la formula.

Laonde l'integrale di dx sarà non solo x ma ancora $x+a$, posta per a una costante qualunque indeterminata, onde se si voglia che il valore di $S \cdot dx$ sia tale che fatto $x=0$ esso diventi $=b$ si aurà $a=b$ e quindi sarà in questo [caso] $S \cdot dx = x+b$.

All'incontro se l'integrale $S \cdot dx$ dovesse svanire svanendo l'x bisognerebbe fare $a=0$, onde ne risulterebbe la sola variabile x pel valore di $S \cdot dx$.

Questa regola dunque si dourà osservare in tutte le integrazioni di quali si vogliano quantità differenziali, acciocché le espressioni che se ne ricavano possano ricevere la maggior universalità possibile, e siano nello stesso tempo applicabili a tutti i casi particolari ch'elleno possono contenere.

Una possibile attività in classe

Individuare nel testo la relazione tra derivata e integrale.

____

Con quale simbolo Lagrange indica gli integrali?

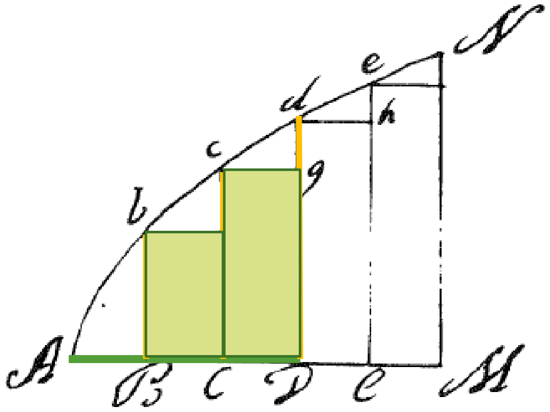
____

Perché è necessario «aggiungere all'integrale ritrovata una qualsivoglia costante»?

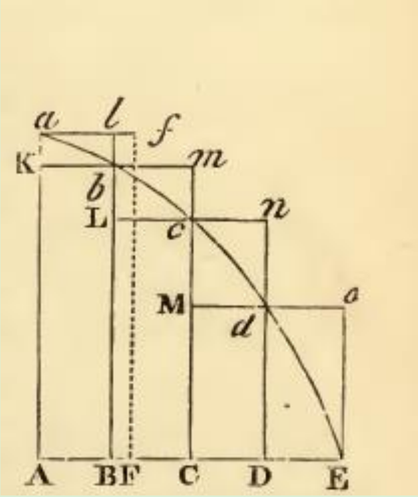
____

L’applicazione della teoria delle somme alle quantità geometriche

55°. Si consideri perciò una Curva qualunque data AN rapportata all’asse AM, di cui le ordinate esprimano una funzione data y del ascissa x. Presa un ascissa qualunque AM si divida in parti uguali AB, BC, CD etc: di cui ciascheduna sia eguale alla differenza dx che si suppone costante e da ogni punto B C D etc: tirinsi le rispettive ordinate Bb, Cc, Dd e compiscansi i rettangoli Bf, Cg, Dh etc:

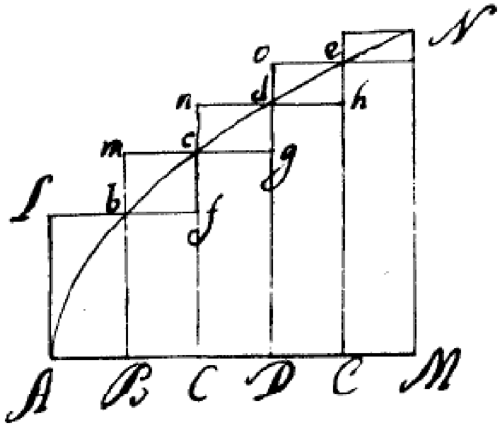


elli è chiaro che tutti questi rettangoli inscritti costituiranno una serie, di cui ciaschedun termine sarà espresso generalmente per ydx, prodotto dell’ordinata che fa l’altezza del rettangolo moltiplicata per la differenza dell’ascissa, che ne fa la base: Dunque se si integri la formula ydx il valore di $S\cdot ydx$ darà la somma generale di tutti questi tali rettangoli, di maniera che posto poscia x=AM si aurà la somma di tutti i rettangoli contenuti nello spazio AMNA. ||



Newton, *Principia*, libro I, sez. I, lemma II

105r **57°.** Questo metodo di ricavar dalla somma dei rettangoli inscritti, la misura di tutta la figura è come si vede generale per qualunque curva; imperciocché, ripigliata la figura prima e compiti i rettangoli *l*B, *mf*, *ng*, *oh* etc: si dimostrerà sempre che la somma di questi rettangoli è eguale al rettangolo ultimo *d*E[145] eguale perciò a ydx: Ma la differenza di ciascuno de' rettangoli inscritti *b*C allo spazio B*bc*C essendo eguale al *bfc* sarà sempre minore del rettangolo *bmcf* in cui è contenuto; Quindi la somma di tutte queste differenze sarà anche minore della somma di tutti i rettangoli *l*B, *mf* etc: che viene espressa per ydx; perciò quanto più si diminuirà questa somma ydx tanto più dourà diminuire quella differenza sinché divenendo questa $=0$ per la posizione di $dx=0$, svanirà altresi totalmente essa differenza e l'integrale ritrovato $S \cdot ydx$ esprimerà esattamente tutta l'area della Curva AMN.



Quindi dunque ne segue questa regola generale che per aver l'area di una curva qualunque data basterà integrare la quantità ydx doppo di
105v avere sostituito in luogo di y il suo || valore conveniente in x indi metter in questo integrale il $dx=0$.

Si conchiuderà dunque, che per avere l'integrale di ydx il quale esprima l'area esatta della Curva si dourà ricercare una quantità algebraica che differenziata secondo le regole date del calcolo differenziale ordinario restituisca la formula proposta ydx.

In questa maniera si ritroverà a dirittura che l'area del triangolo espressa per $S \cdot xdx$ è eguale $\frac{x^2}{2}$ che quella della Parabola espressa per $S \cdot \frac{x^2 dx}{p}$ è $\frac{x^3}{3p}$ e così di qualsivoglia altra Curva. ||

[...] *anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi profondano le loro radici. Ad una condizione però: che* ***di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico***[...]; *che insomma – dopo avere studiato la scienza –* ***ce ne valiamo per comprendere la storia****.*

F. Enriques, *Insegnamento dinamico*, 1921

Riferimenti bibliografici

Borgato, M.T. (ed.), *Giuseppe Luigi Lagrange. Principj di analisi sublime*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 7, n. 2, 1987, pp. 45-198.

Borgato, M.T., *Lagrange e le equazioni alle differenze finite*, in S. Féry (ed.), Aventures de l'analyse de Fermat à Borel. Mélanges en l'honneur de Christian Gilain, Université de Nancy, 2012, pp. 301-335.

Lazzari, E., Lugaresi, M.G., Magrone, P., Scalambro, E., *Starting from the History of Mathematics in Late Modern Italy (XVIII-XX centuries): From Primary Sources to Mathematical Concepts*, Proceedings ESU-9, Salerno, luglio 2022, in corso di stampa.

Pepe, L., *Il calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 1, n. 2, 1981, pp. 43-101.

Materiali del Workshop ESU-9: http://dmi.unife.it/it/ricerca-dmi/mathesis/materiali-esu-9