Università degli Studi di Ferrara | Dipartimento di Matematica e Informatica

Liceo Matematico

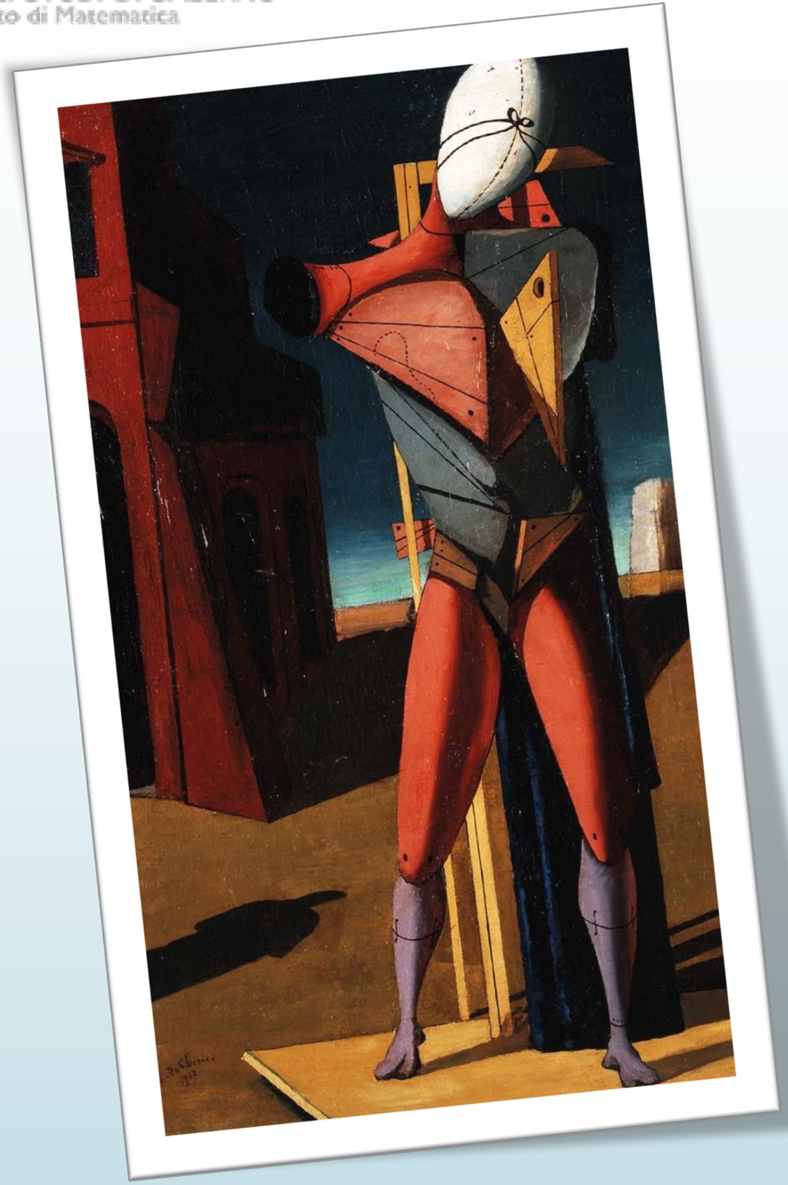
DipMat
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Dipartimento di Matematica

Convegno
"Matematica e Storia negli insegnamenti matematici"

Dal compasso di Napoleone alle nuove tecnologie

Ilaria Veronesi
(Università di Salerno)

Ferrara, 28 aprile 2023
Dipartimento di Matematica e Informatica (Università di Ferrara)



Introduzione

Il laboratorio di matematica, storia ed economia ha l'obiettivo di:

- dare una lettura ed interpretazione degli eventi della società,
- sviluppare idee personali applicando modelli matematici in situazioni di realtà.

Il mondo dell'economia

- è un tema di forte impatto
- è importante per l'orientamento universitario
- consente agli studenti di studiare sistematicamente i potenziali sviluppi di un'ampia varietà di scenari

Liceo Matematico

offre agli studenti delle scuole secondarie superiori

corsi e laboratori nei quali

- sono sviluppate le relazioni tra la cultura scientifica e umanistica
- la matematica è denominatore comune
- Si interpretano fenomeni della realtà grazie alla collaborazione tra discipline
- Vengono utilizzate più recenti tecnologie

Liceo Matematico

- interconnessione tra scienza, tecnologia e cultura
- collaborazione tra il mondo della scuola, dell'università e della ricerca

Permettono di acquisire

- competenze per il futuro e per scegliere i percorsi universitari
- apprendimento efficace

Obiettivi XXI secolo

Creatività

pensiero Critico

Collaborazione

Comunicazione

gli studenti lavorano insieme per

- creare soluzioni
- comunicare le proprie soluzioni
- scoprire la strategia più efficace

Riferimenti normativi

In Italia il Ministero dell'Istruzione ha pubblicato le "Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari" ove gli obiettivi si riferiscono ai 17 obiettivi dell'**Agenda 2030** per uno sviluppo sostenibile, in particolare, l'**Obiettivo 4** dell'Agenda evidenzia

"Fornire un'educazione di qualità, equa ed inclusiva,

e opportunità di apprendimento per tutti "

Indicazioni Nazionali

La **matematica fornisce strumenti per indagare e spiegare molti fenomeni** del mondo che ci circonda, favorendo un **approccio razionale ai problemi** che la realtà pone e fornendo, quindi, un contributo importante alla costruzione di una cittadinanza consapevole (..) La matematica, tuttavia, permette anche di **sviluppare competenze trasversali** importanti attraverso attività che valorizzano i processi tipici della disciplina: In particolare, la matematica (…) contribuisce a sviluppare la **capacità di comunicare e discutere, di argomentare** in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.

(lo studente) saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel **contesto storico entro cui si sono sviluppate** e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una **visione storico-critica** dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.

Vari livelli di interazione:

- Visione transdisciplinare dei saperi per la contestualizzazione delle idee e scoperte matematiche nel periodo storico
- Interazione di saperi per una riflessione metacognitiva
- il pensiero razionale come guida per interpretare la realtà (scelte sociali e scelte individuali)
- la teoria delle decisioni è un modo analitico e sistematico per affrontare i problemi
- La descrizione anedottica per coinvolgere ed interessare gli allievi (approccio immediato e motivante, di scarsa ricaduta sul quadro formativo)

Competenze

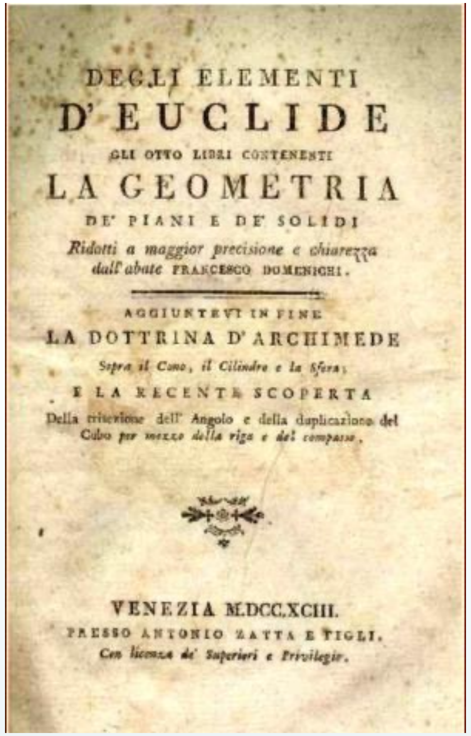
- Consapevolezza dei diversi linguaggi: quotidiano, storico, economico, matematico/simbolico, grafico di vario tipo
- Capacità di cogliere i nessi tra diversi registri semantici
- Capacità nel problem solving: ragionamento adeguato al contesto e sviluppo di giudizio critico
- Capacità di argomentare ed esporre le proprie idee motivandole

Metodologia

- Approccio costruttivista
- Role-playing simulato
- Partecipazione attiva per stimolare il pensiero laterale e l'intelligenza emotiva
- Docenti come mediatori culturali

Il percorso storico-geometrico

Gli “*Elementi*” di Euclide, scritti verso il 300 a.C



DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.

AGGIUNTEVI IN FINE
LA DOTTRINA D'ARCHIMEDE
Sopra il Cono, il Cilindro e la Sfera;
E LA RECENTE SCOPERTA
Della trisezione dell' Angolo e della duplicazione del Cubo *per mezzo della riga e del compasso.*

VENEZIA M.DCC.XCIII.
PRESSO ANTONIO ZATTA E FIGLI.
Con licenza de' Superiori e Privilegio.

Nella geometria di Euclide gli oggetti geometrici, esclusi quelli **primitivi**, devono essere costruiti seguendo precise **<u>regole</u>**

I **postulati:**

I. *Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto*
II. *E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta*
III. *E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni raggio*

Compassi nel Rinascimento

Compasso di riduzione

Compasso per Ellisse di Leonardo da Vinci

Compasso da carteggio nautico

Compasso di divisione

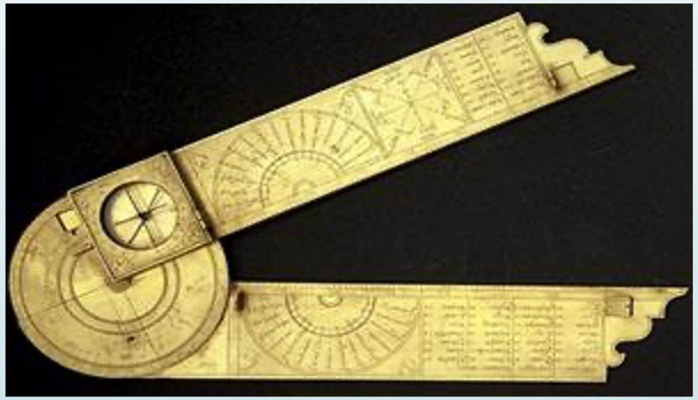
Compasso sferico

Compasso di Mordente

Compasso di proporzione

Compasso a tre punte

Compasso topografico



Compasso di Galileo

Nel 1606 pubblica ‘*Le operazioni del compasso geometrico et militare*’.

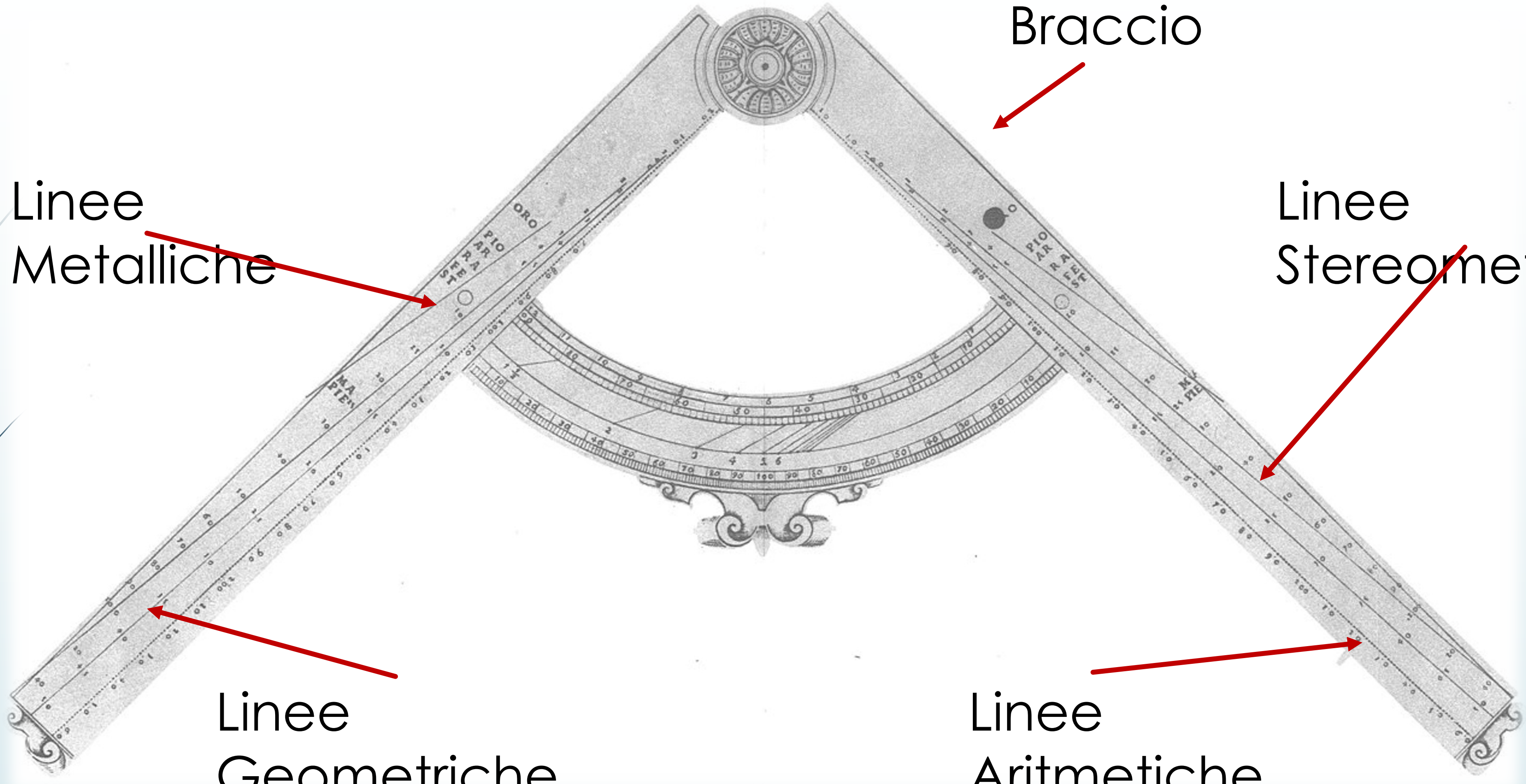
Dedicato al principe Cosimo De Medici (1590-1621), futuro granduca di Toscana (1609-1621), il testo

- Illustra nel dettaglio l’uso dello strumento e le operazioni che con esso si possono eseguire
- Tace sulla costruzione delle scale, forse per proteggere la sua invenzione da possibili concorrenti

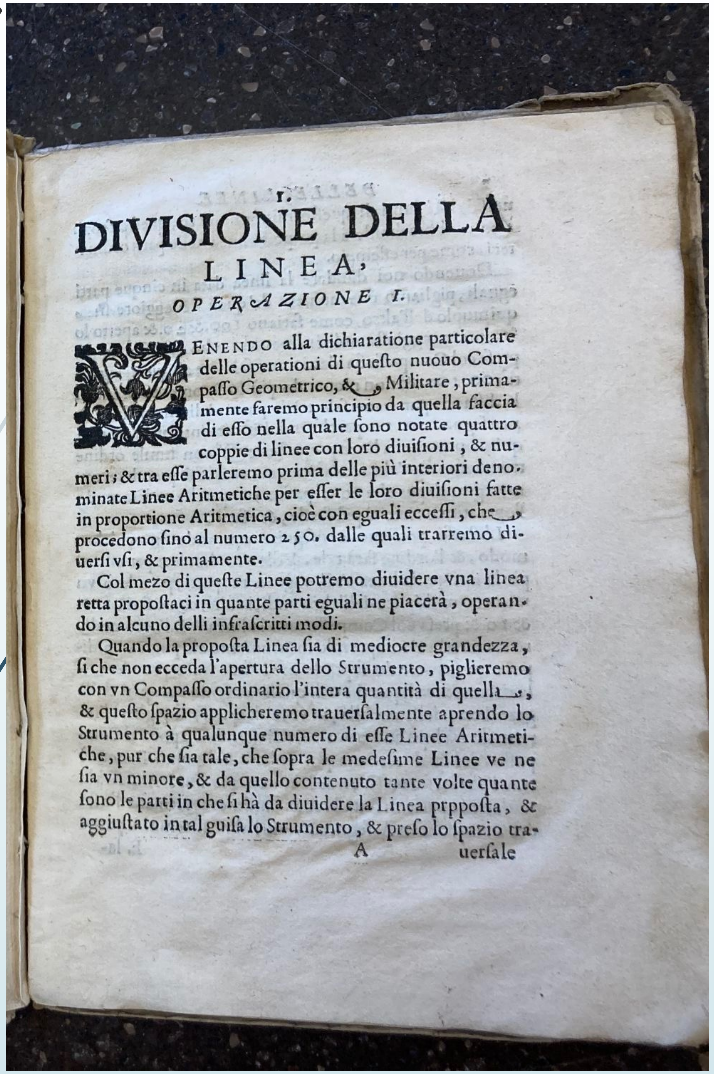
Compasso di Galileo

Il Compasso di Galileo rappresenta un'innovazione originale e insieme una sintesi dei numerosi tentativi, effettuati nel corso del Rinascimento, di elaborare uno strumento universale, che permettesse di eseguire agilmente calcoli aritmetici e operazioni geometriche

- calcolo degli interessi
- estrazione delle radici quadrate e cubiche,
- disegno dei poligoni
- calcolo di aree e volumi,
- misura dei calibri
- rilevamento del territorio.



Linee Aggiunte   Linee Poligrafiche   Linee Tetragoniche



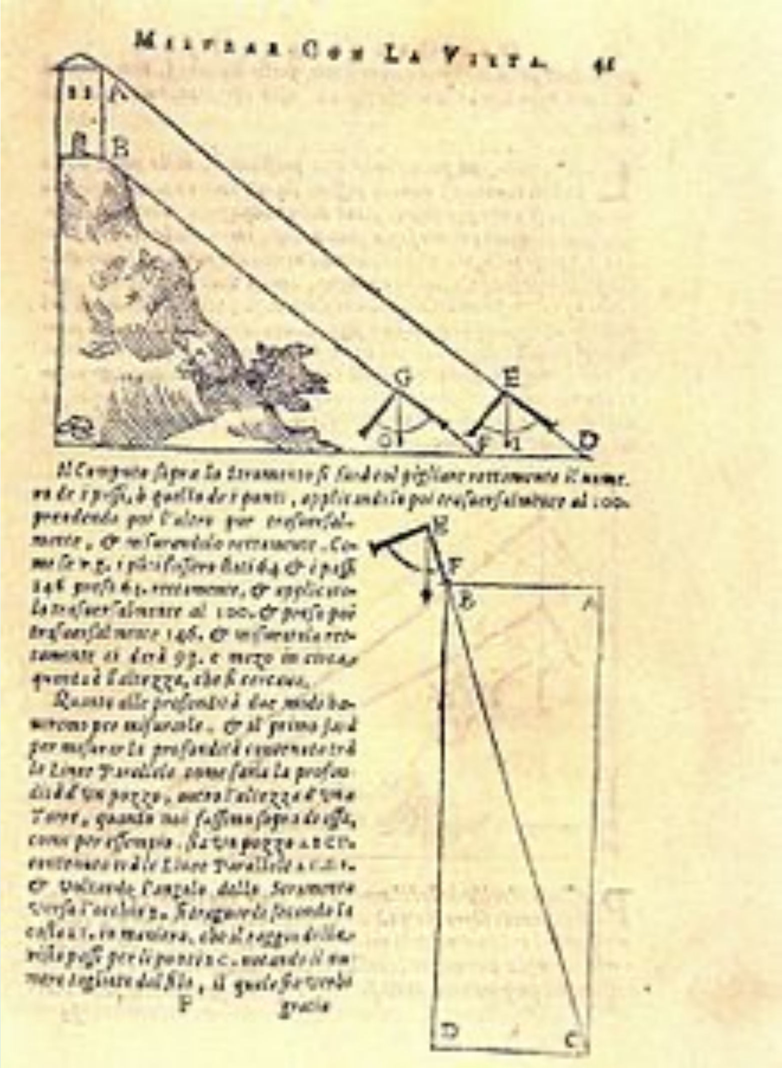
1.
DIVISIONE DELLA LINEA.
OPERAZIONE I.

VENENDO alla dichiaratione particolare delle operationi di questo nuouo Compasso Geometrico, & Militare, primamente faremo principio da quella faccia di esso nella quale sono notate quattro coppie di linee con loro diuisioni, & numeri; & tra esse parleremo prima delle più interiori denominate Linee Aritmetiche per esser le loro diuisioni fatte in proportione Aritmetica, cioè con eguali eccessi, che procedono sino al numero 250. dalle quali trarremo diuersi vsi, & primamente.

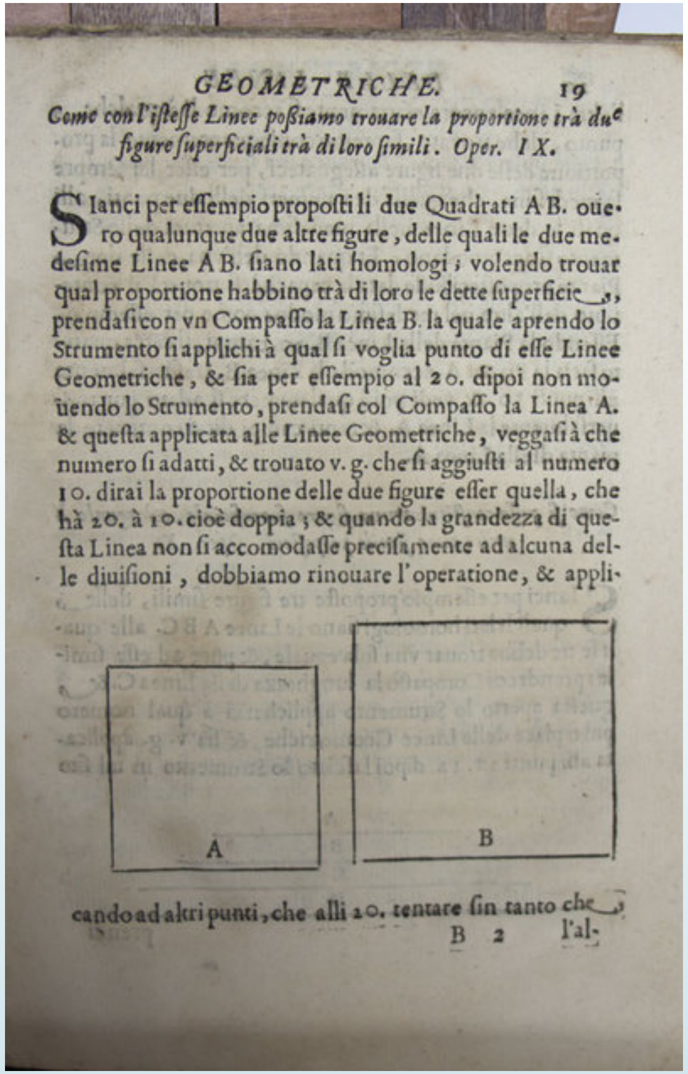
Col mezo di queste Linee potremo diuidere vna linea retta propostaci in quante parti eguali ne piacerà, operando in alcuno delli infrascritti modi.

Quando la proposta Linea sia di mediocre grandezza, si che non ecceda l'apertura dello Strumento, piglieremo con vn Compasso ordinario l'intera quantità di quella, & questo spazio applicheremo trauersalmente aprendo lo Strumento à qualunque numero di esse Linee Aritmetiche, pur che sia tale, che sopra le medesime Linee ve ne sia vn minore, & da quello contenuto tante volte quante sono le parti in che si hà da diuidere la Linea prpposta, & aggiustato in tal guisa lo Strumento, & preso lo spazio tra-

A uersale



MISURAR CON LA VISTA 41



GEOMETRICHE. 19

Come con l'istesse Linee possiamo trouare la proportione trà due figure superficiali trà di loro simili. Oper. IX.

Sianci per essempio proposti li due Quadrati A B. ouero qualunque due altre figure, delle quali le due medesime Linee A B. siano lati homologi; volendo trouar qual proportione habbino trà di loro le dette superficie, prendasi con vn Compasso la Linea B. la quale aprendo lo Strumento si applichi à qual si voglia punto di esse Linee Geometriche, & sia per essempio al 20. dipoi non mouendo lo Strumento, prendasi col Compasso la Linea A. & questa applicata alle Linee Geometriche, veggasi à che numero si adatti, & trouato v. g. che si aggiusti al numero 10. dirai la proportione delle due figure esser quella, che hà 20. à 10. cioè doppia; & quando la grandezza di questa Linea non si accomodasse precisamente ad alcuna delle diuisioni, dobbiamo rinouare l'operatione, & applicando ad altri punti, che alli 20. tentare sin tanto che

B 2 l'al-

Da Euclide a Mascheroni

Tutte le costruzioni geometriche effettuabili con riga e compasso possono essere fatte usando solo il compasso e possono essere composizioni delle operazioni elementari

- bisecare un dato arco di cerchio,
- sommare e sottrarre due segmenti dati,
- trovare il quarto proporzionale dati tre segmenti,
- trovare il punto di intersezione di due rette date, e i punti di intersezione tra una retta e un cerchio dati.

Il celebre matematico ed astronomo Delambre, segretario dell'Istituto francese per le scienze esatte, nel rapporto che fa all'Imperatore Napoleone sui progressi della scienza, così parlò di Mascheroni e la sua opera:

"La geometria antica non ammetteva nelle sue dimostrazioni se non quello che può eseguirsi mediante la riga ed il compasso. Mascheroni più severo ancora volle escludere la riga. Vi è certamente da rimanere grandemente meravigliati del gran numero di nuove ed acutissime proposizioni ch'Egli ha saputo trovare in un argomento apparentemente esaurito. I suoi principali teoremi erano stati portati in Francia col trattato di Campoformio dal vincitore e pacificatore dell'Italia. Nacque nei dotti francesi il desiderio di conoscere per intero l'opera di Mascheroni e ben tosto ne fu pubblicata la traduzione".

A Bonaparte l'Italico

Io pur ti vidi con l'invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con attento guardo
Il curvo giro del fedel compasso.
E te pur vidi aprir le arcane cifre
D'ardui problemi col valor d'antico
Geometra maestro, e mi sovvenne
Quando l'Alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie, anno che splende
Nell'abisso de' secoli qual sole.
Segui l'impresa, e coll'invitta mano
Guida all'Italia tua liberi giorni.


LA GEOMETRIA
DEL
COMPASSO
DI
LORENZO MASCHERONI.

PAVIA anno V della Repubblica Francese.

Presso gli Eredi di Pietro Galeazzi
(1797).

Napoleone e il compasso

Napoleone Bonaparte fu anche un grande matematico e proprio la matematica lo aiutò nella carriera militare.

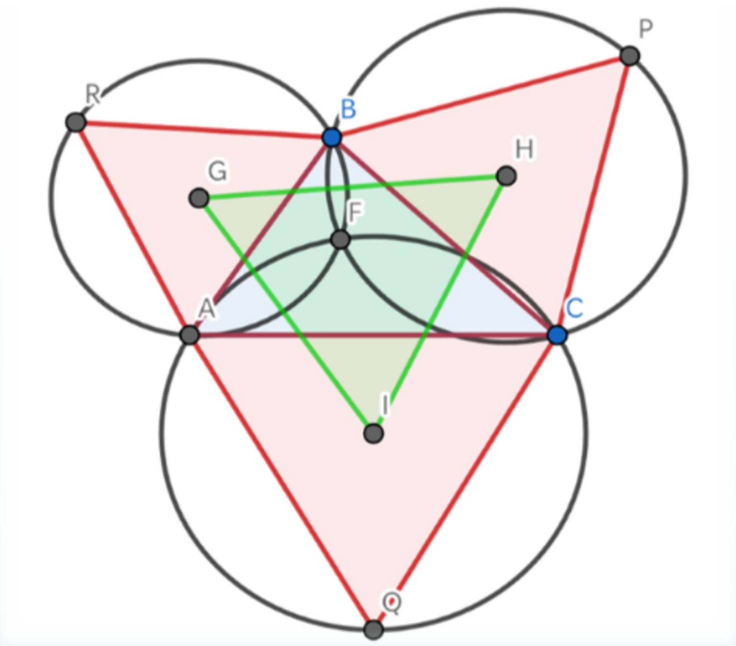
Napoleone in battaglia era solito utilizzare i "compassi da campo" per trovare sempre la posizione centrale.

La determinazione di tale punto era fondamentale per gestire le strategie di assalto, ma durante una battaglia poteva essere estremamente arduo trovarlo attraverso complessi calcoli angolari, non era invece assolutamente difficile affidarsi ai "compassi da campo" ed ottenerlo graficamente partendo dal

Teorema di Napoleone

Teorema di Napoleone:

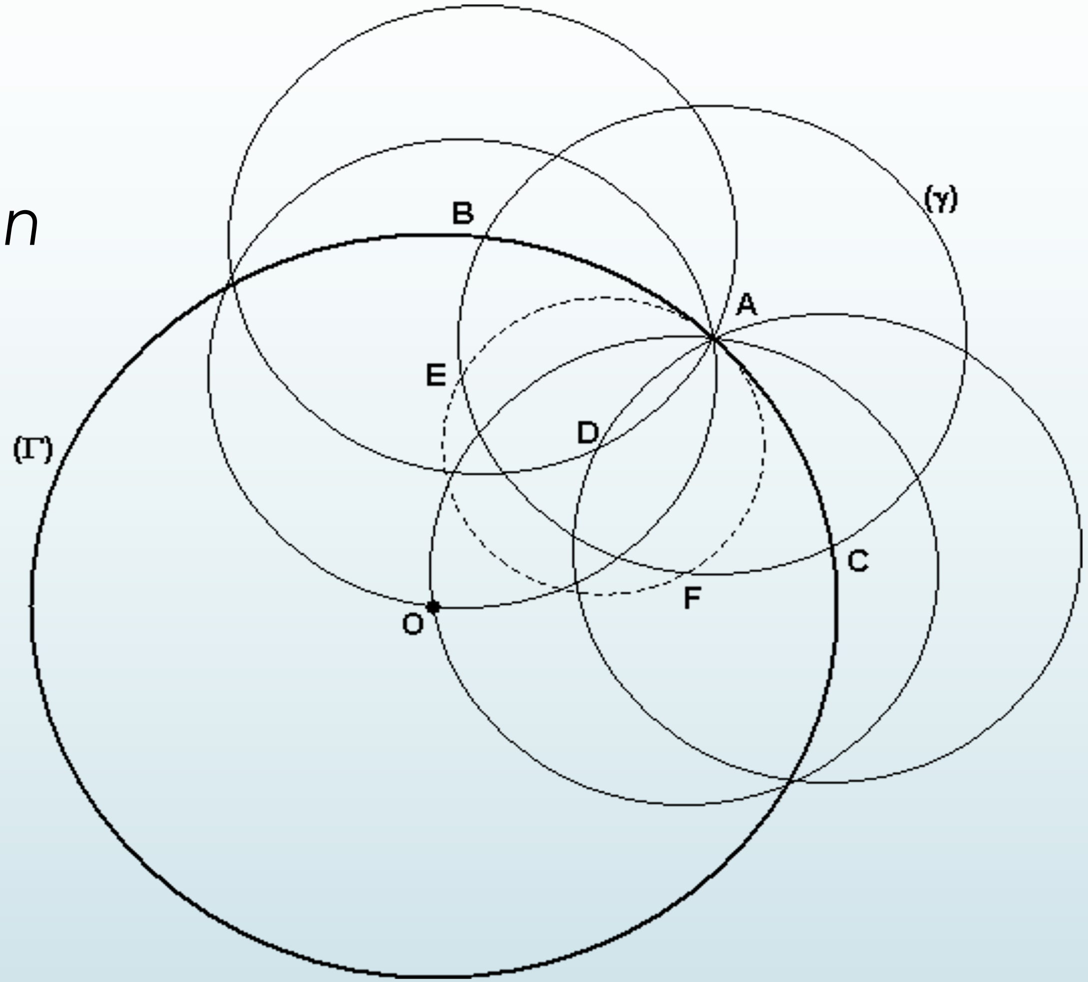
"i baricentri dei triangoli equilateri, costruiti esternamente sui lati di un triangolo qualsiasi, formano un triangolo equilatero"

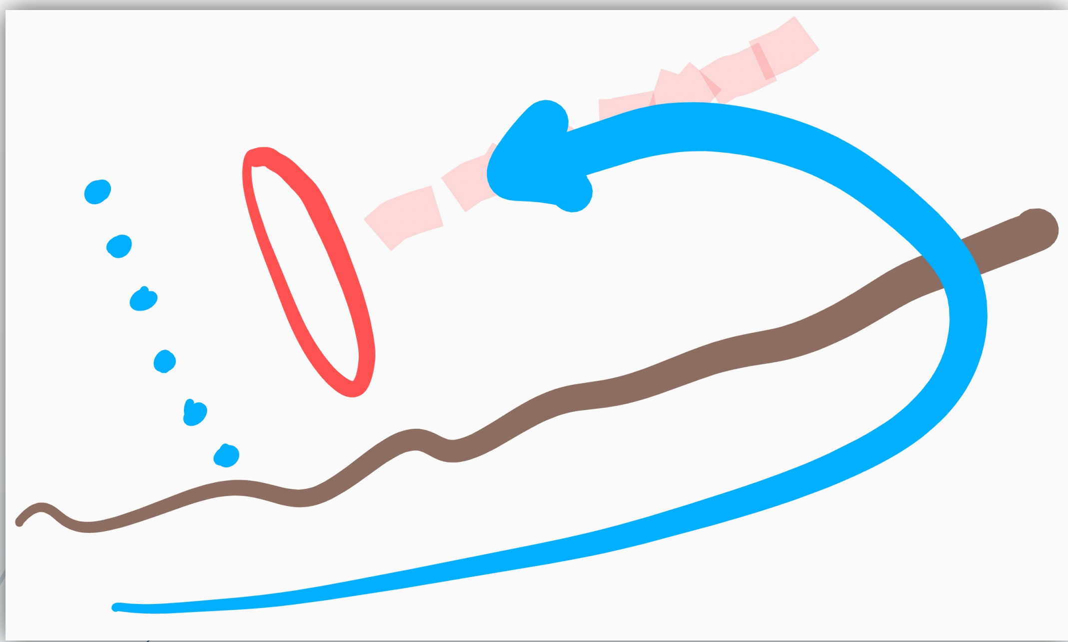


La dimostrazione del teorema porta alla determinazione della posizione geometrica del punto di Fermat-Torricelli.

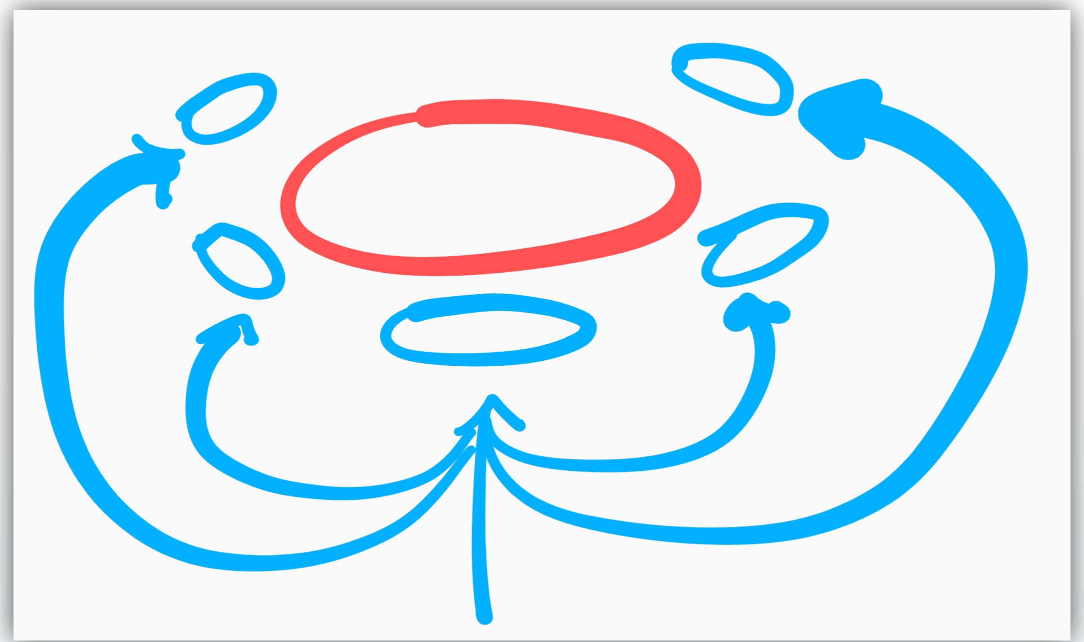
Problema di Napoleone:

“determinare con il solo compasso il centro (che si suppone non noto) di un cerchio dato”



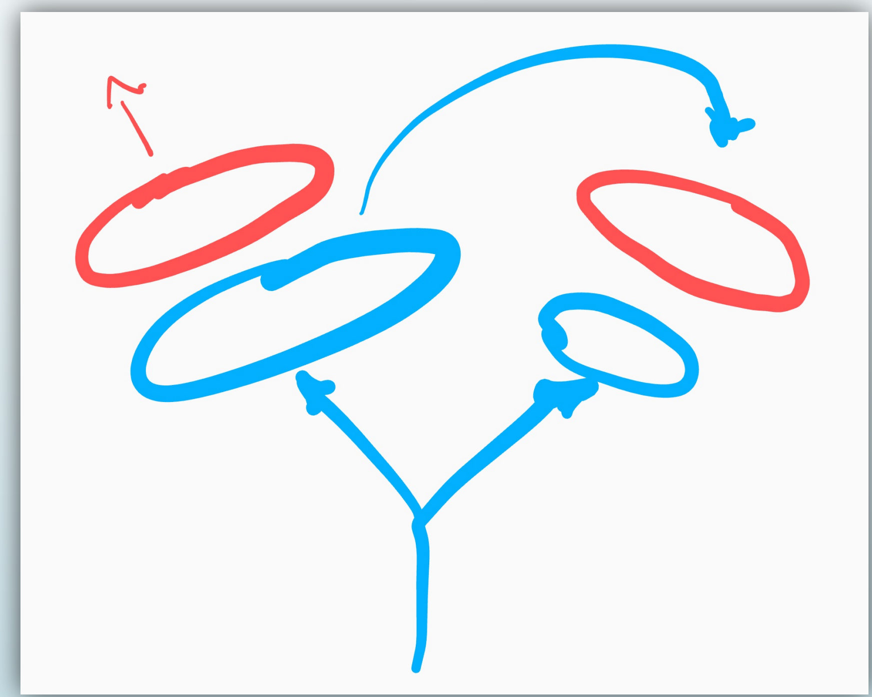


Marengo
Ulm



Austerlitz

Montenotte



Waterloo

Il percorso storico-geometrico si arricchisce della Teoria delle Decisioni

Assunzioni di base

Razionalità individuale: Gli esseri umani sono esseri razionali, sempre alla ricerca della migliore alternativa in un insieme di scelte possibili in modo che ogni giocatore massimizzi la sua utilità.

Stabilità: tutti i giocatori "rispetteranno" un dato profilo di strategia $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ se è una scelta massimizzante del profitto del giocatore **i** quando il resto dei giocatori sceglie esattamente il profilo dato. Nessun giocatore vuole deviare da **x**.

Problema di localizzazione ottima nel piano

- I consumatori sono distribuiti nel piano (sottoinsieme compatto)
- Ci sono n venditori già posizionati nel piano
- Un nuovo negozio vuole trovare la posizione ottima per massimizzare la quota di mercato (consumatori) che può raggiungere.

I modelli di localizzazione competitivi

Alcune strutture sono già presenti sul mercato ed una nuova struttura competerà per la quota di mercato.

Esistono due approcci principali per stimare e analizzare la quota di mercato catturata da strutture in funzione della loro ubicazione.

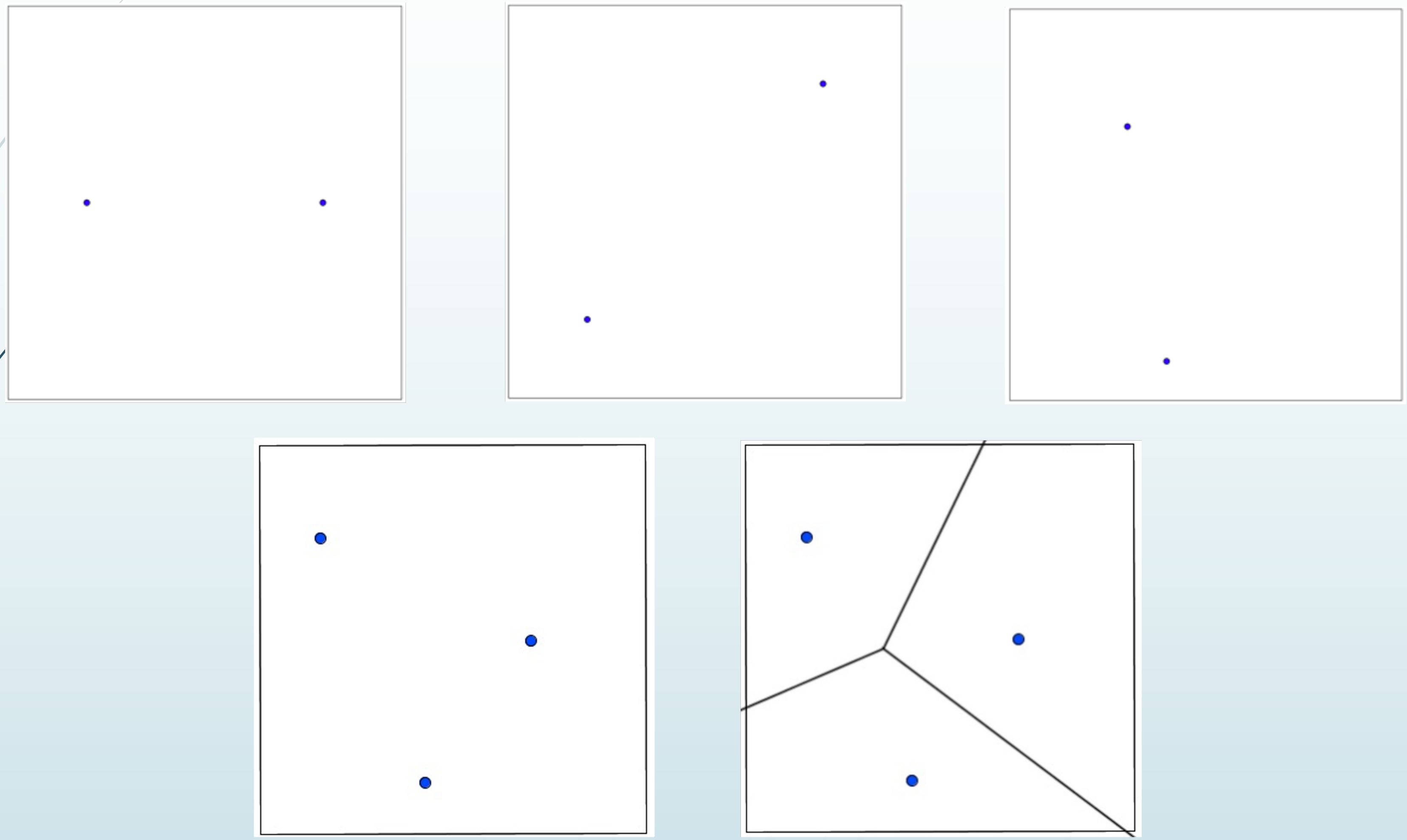
- Il primo approccio: Hotelling - i clienti patrocinano la struttura più vicina
- Il secondo approccio: Huff - la probabilità che un cliente usufruisca di una struttura è proporzionale all’attrattività della struttura e inversamente proporzionale alla distanza.

Basic Location Model

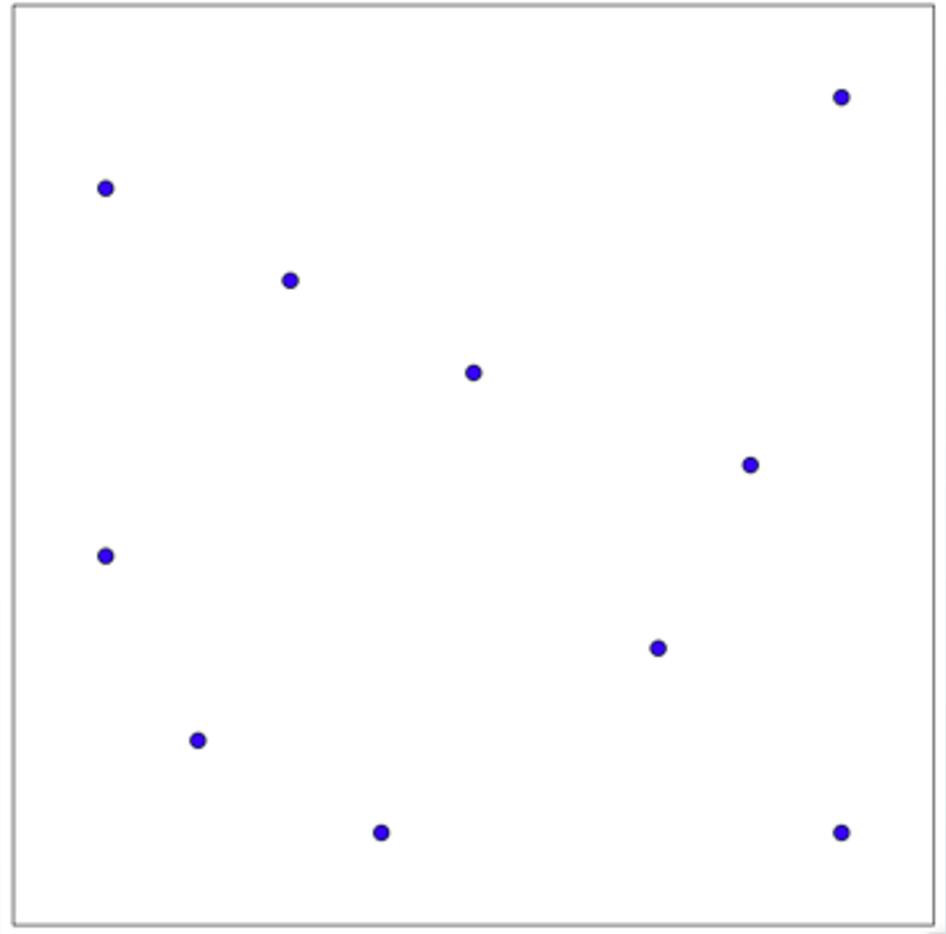
Il modello è definito come segue:

- I consumatori sono distribuiti secondo una misura λ su uno spazio metrico Borel compatto (S ; λ) con sottoinsieme S compatto di R^2.
- Un insieme finito K = {1, ..., k} di rivenditori ha localizzato le proprie strutture su S .
- Un nuovo rivenditore vuole massimizzare la sua quota di mercato dopo aver individuato una nuova struttura, a seconda solo della distanza.

Approccio Geometrico



Approccio Geometrico



Voronoi

Sullo spazio S è definita una tassellazione:

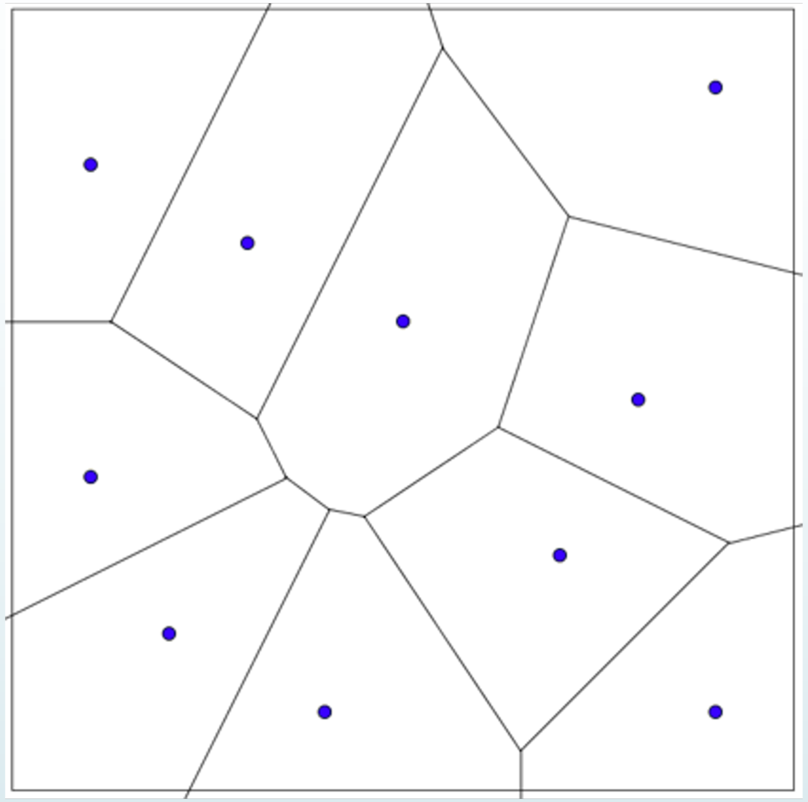
- Sia $P_K := \{p_1, \ldots, p_k\} \subset S$ un insieme finito di punti in S dove i rivenditori hanno appena aperto un negozio,
- $V_K(p_k) := \{y \in S : d(y, p_k) \leq d(y, p_j)$ per ogni $p_j \in P_K\}$ è la tassellazione di Voronoi di S indotta da P_K
- La cella $V_K(p_k)$ contiene tutti i punti la cui distanza da p_k non è maggiore della distanza dagli altri punti in P_K.

Due celle di Voronoi, $V_K(p_k)$ e $V_K(p_j)$, sono adiacenti se essi condividono un bordo, e p_k è confinante con p_j e viceversa.

Poligono di Voronoi

Sul sottoinsieme compatto S di R^2 si definisce la distanza Euclidea.

La regione di dominanza è chiamata *poligono di Voronoi* associato a p_k , e la partizione V_K (P_K) è il diagramma di Voronoi generato da P_K. I bordi dei poligoni di Voronoi in R^2 sono segmenti.

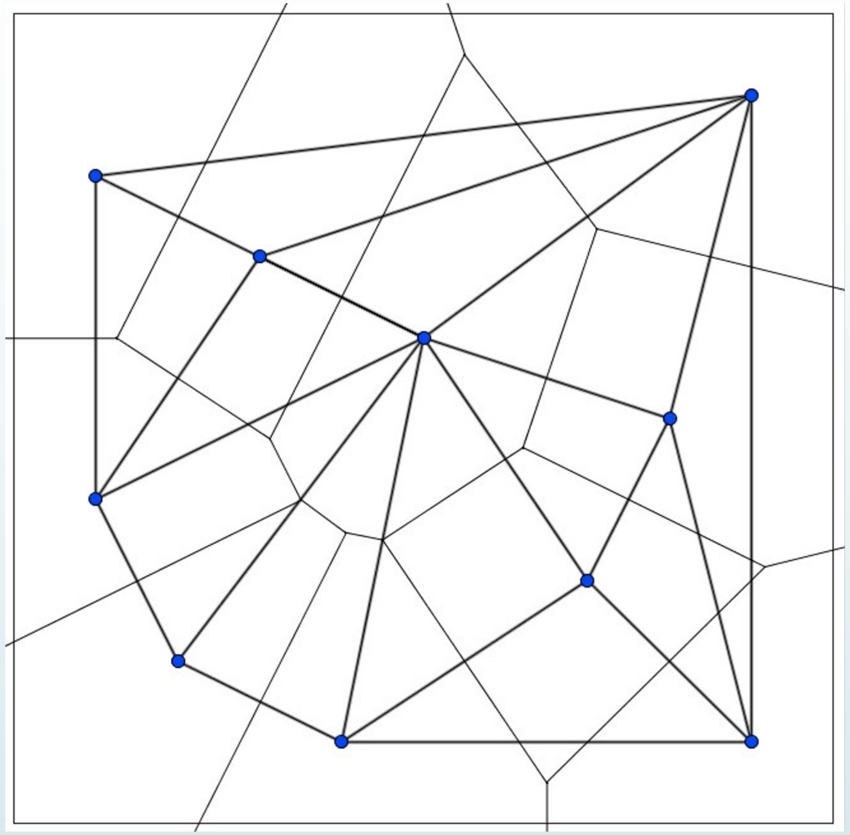


il payoff dei giocatori

Triangolazione di Delaunay

La triangolazione di Delaunay, $DT(P_K)$, di un insieme di punti P_K è la triangolazione tale che nessun punto di P_K è interno alla circonferenza circoscritta di ogni triangolo di $DT(P_K)$. I bordi $DT(S)$ sono chiamati *bordi di Delaunay*.

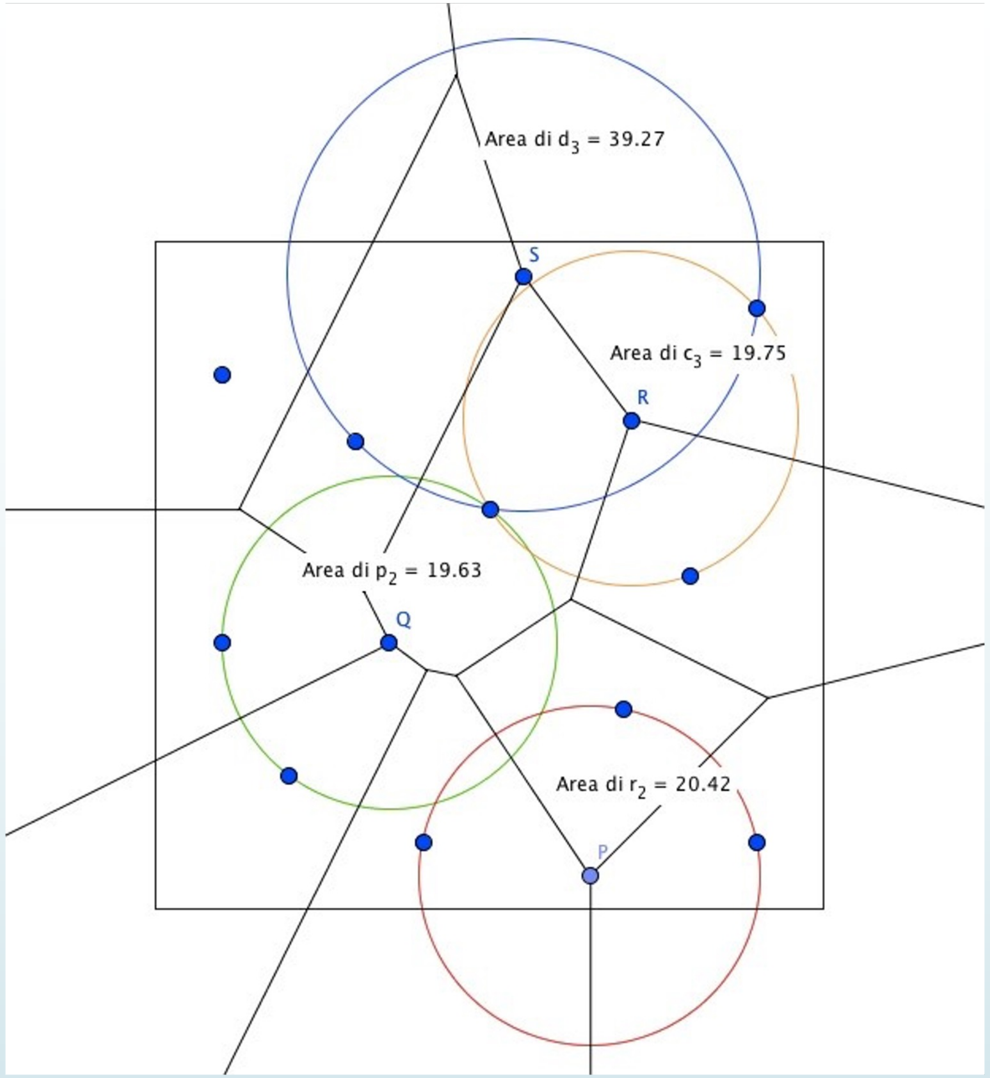
Due punti di S sono collegati da un bordo di Delaunay se e solo se le loro regioni di Voronoi sono adiacenti.



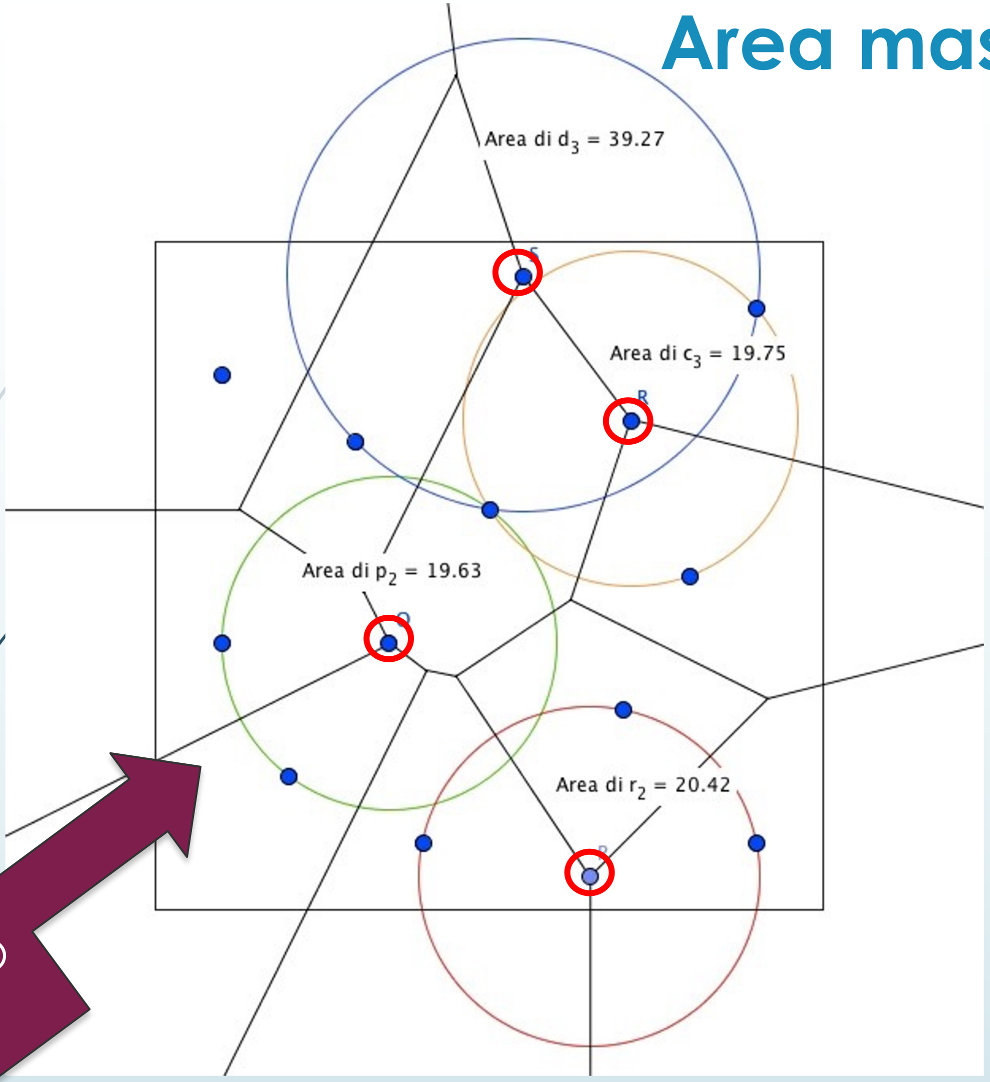
Cerchio massimo

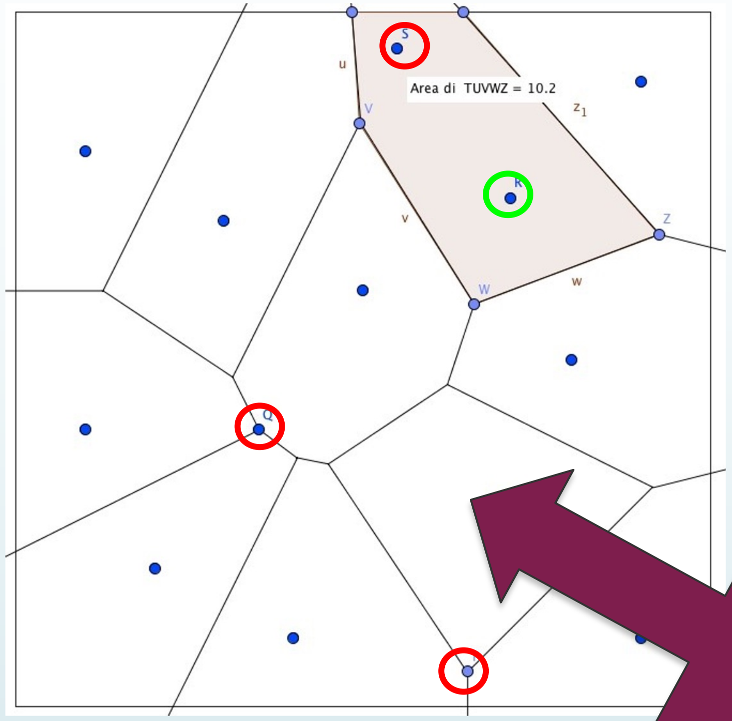
Per posizionare il nuovo negozio che abbia regione di dominanza massima troviamo la circonferenza circoscritta ai triangoli di Delaunay che:

- Abbia area massima,
- Non contenga punti di P_K al suo interno,
- Non c'è altro cerchio con raggio strettamente maggiore contenuto interamente in S



Area massima

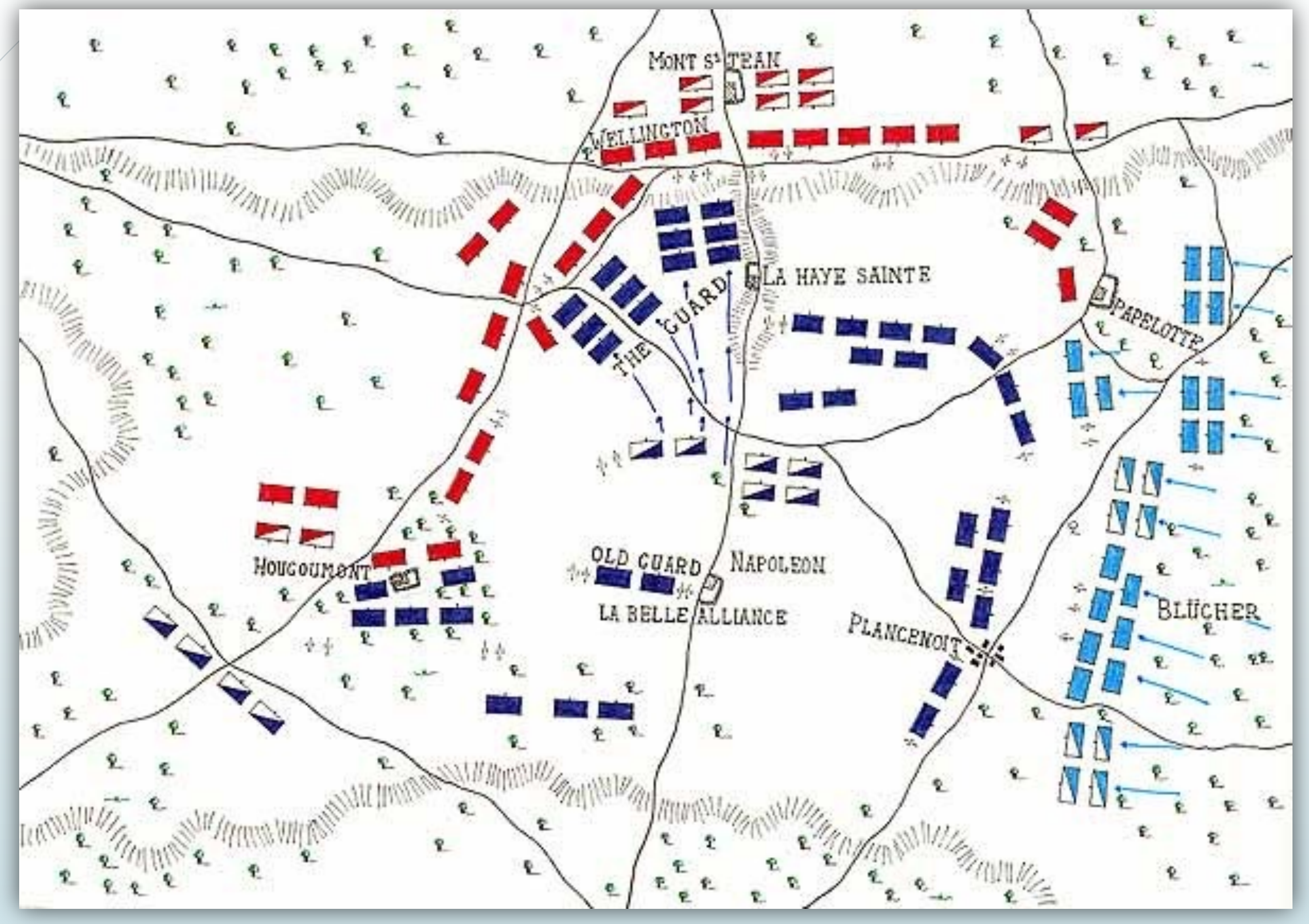


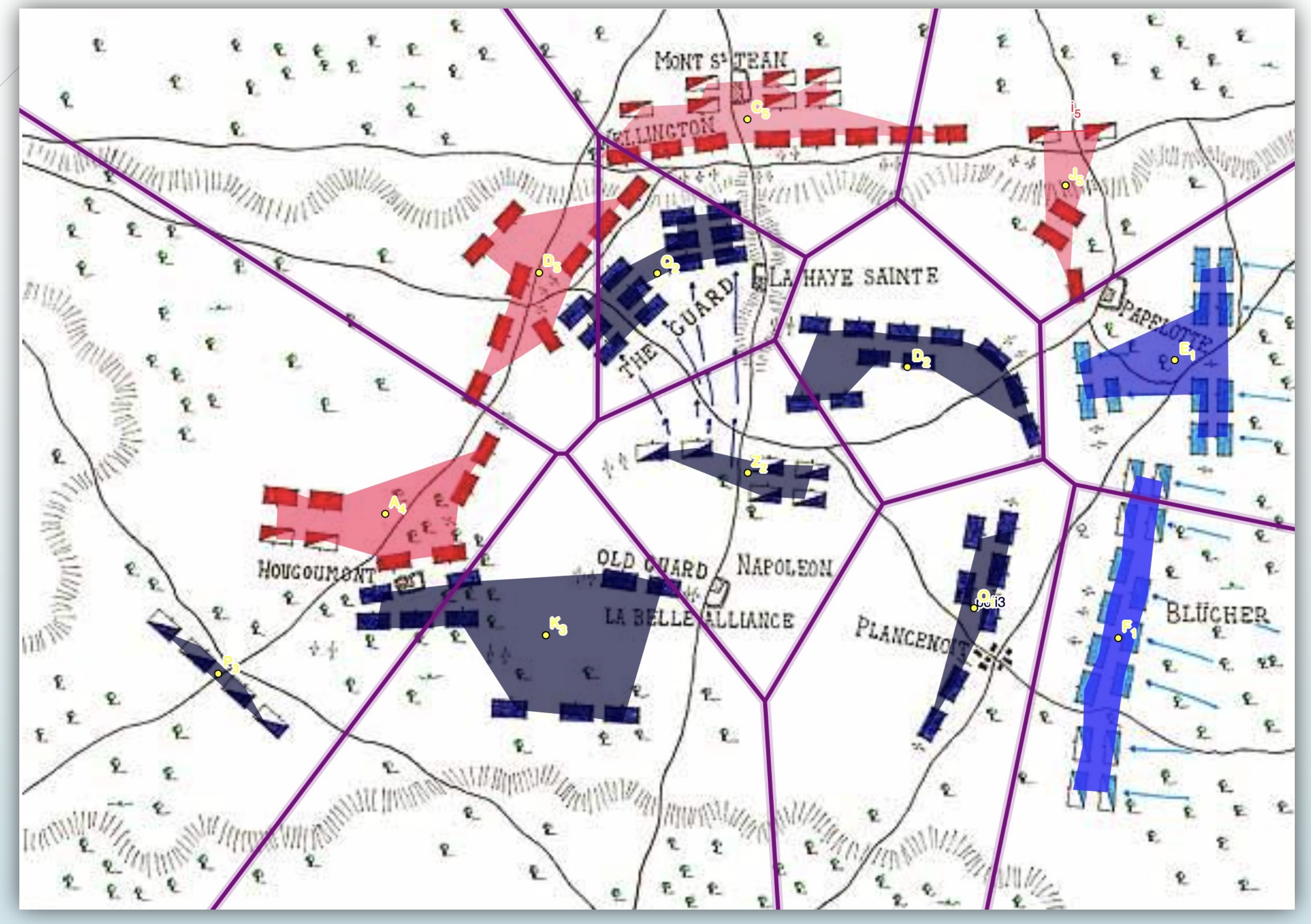


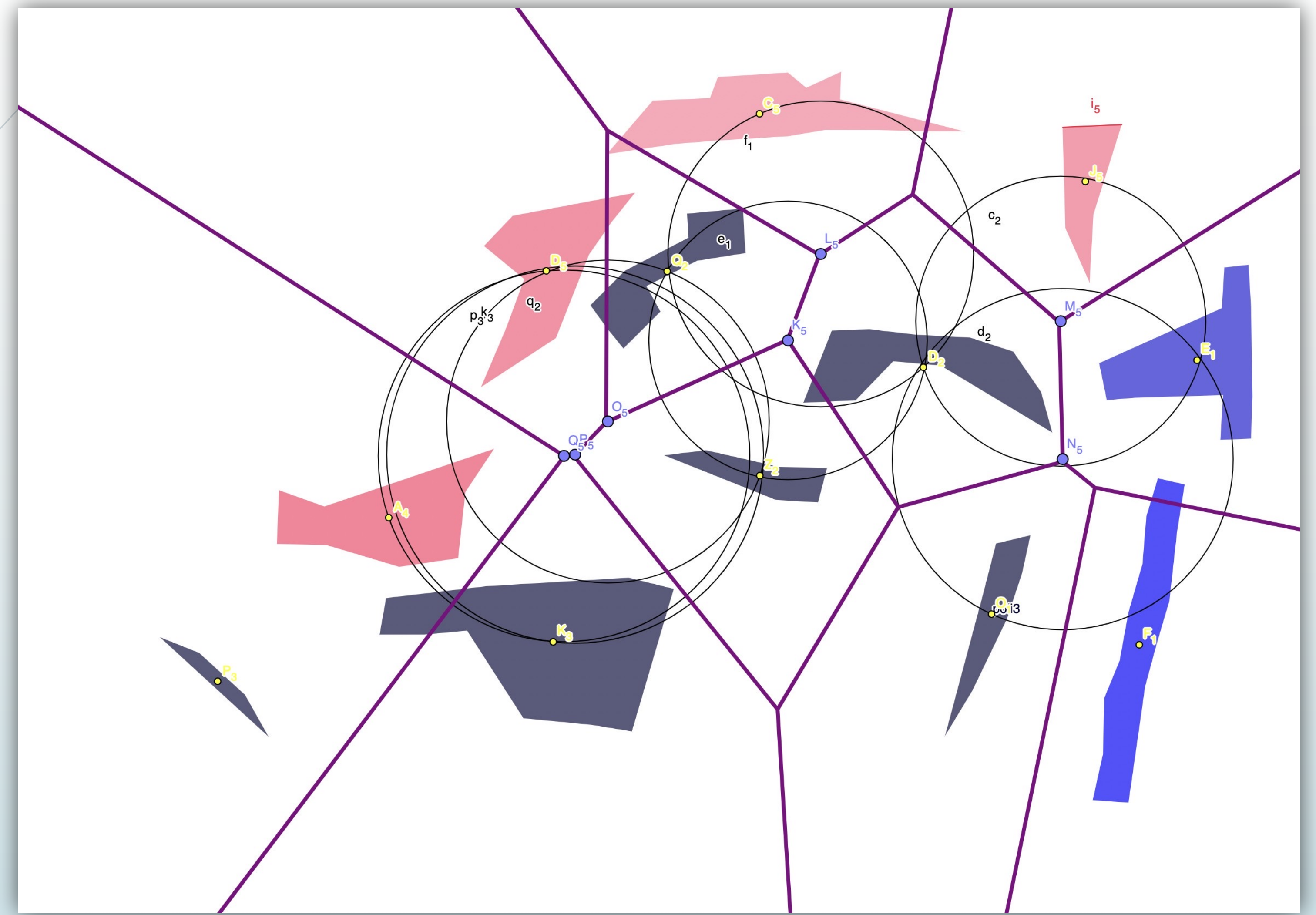
PROBLEMA DI POSIZIONAMENTO

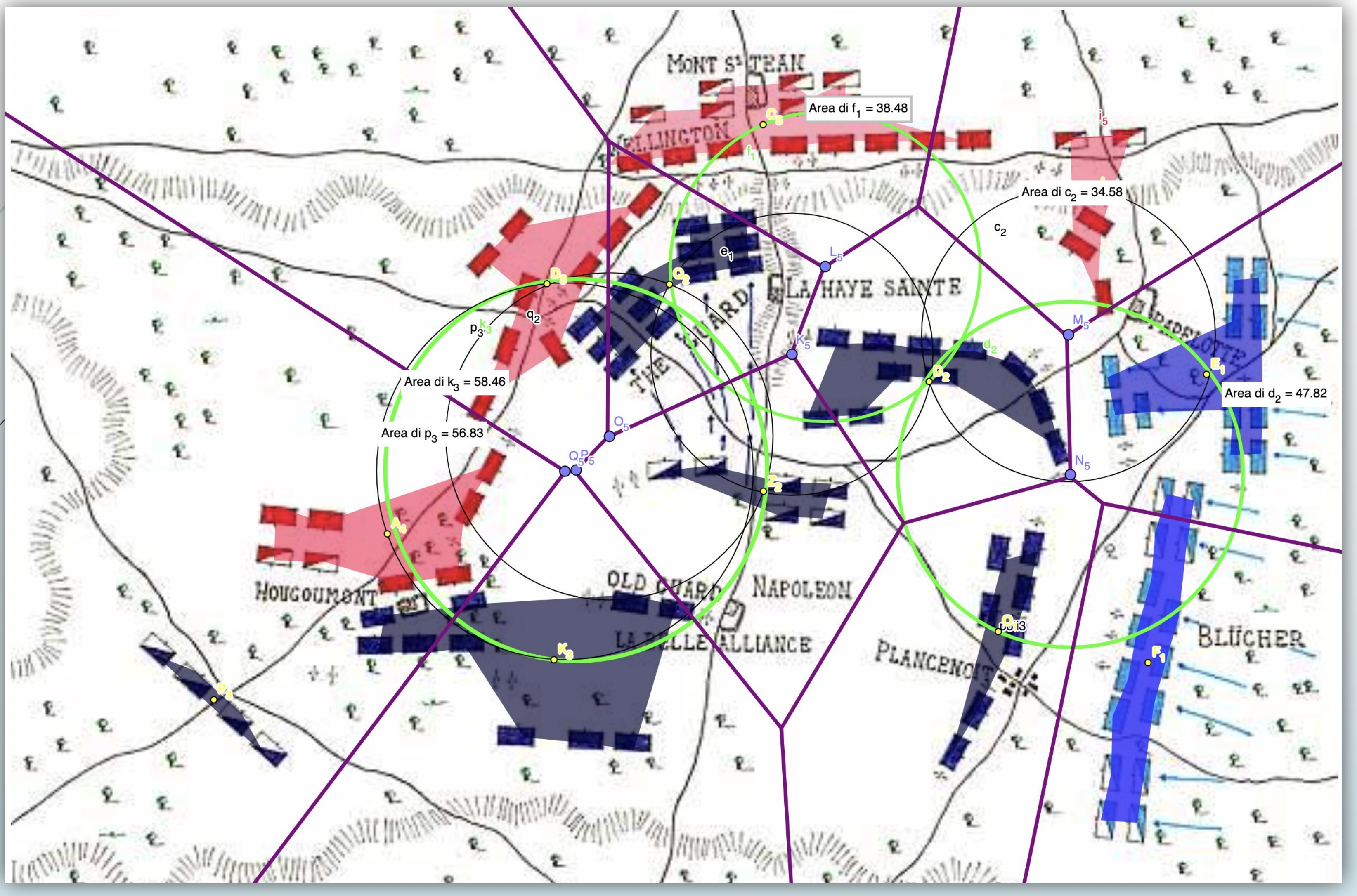
LA RISPOSTA GEOMETRICA CON SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA

Napoleone... …Analizziamo Waterloo




MONT S^T JEAN
WELLINGTON
LA HAYE SAINTE
THE GUARD
PAPELOTTE
HOUGOUMONT
OLD GUARD
NAPOLEON
LA BELLE ALLIANCE
PLANCENOIT
BLÜCHER


i5
f1
e1
c2
d2
q2
L5
K5
M5
N5
O5


MONT ST JEAN
WELLINGTON
Area di f_1 = 38.48
Area di c_2 = 34.58
LA HAYE SAINTE
THE GUARD
Area di k_3 = 58.46
Area di p_3 = 56.83
Area di d_2 = 47.82
HOUGOUMONT
OLD GUARD
NAPOLEON
LA BELLE ALLIANCE
PLANCENOIT
BLÜCHER

Conclusioni

- La Teoria dei Giochi risponde alla necessità di spiegare situazioni di conflitto o interazioni strategiche.
- Nella narrazione analitica degli eventi la matematica è lo strumento principale per la formalizzazione di modelli teorici che diventano chiavi universali per l'analisi delle relazioni tra agenti.
- Analizziamo alcuni importanti eventi storici, riconoscendo gli elementi essenziali della storia per ricostruire la narrazione analitica e individuare l'equilibrio del modello.
- ... Continua...

Università degli Studi di Ferrara | Dipartimento di Matematica e Informatica

Liceo Matematico

DipMat
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Dipartimento di Matematica

grazie