



DipMat



Attività 4

Botti di vino e fiocchi di neve. Un percorso storico didattico attraverso la matematica di Johannes Kepler

Per i docenti

Con questa seconda attività si vogliono avvicinare gli studenti alla celebre congettura di Keplero, a partire dalla lettura di alcune parti della *Strena seu de nive sexangula* in cui viene elaborata. Vista la complessità dell'argomento, alcuni aspetti saranno soltanto accennati o citati.

Fasi dell'attività laboratoriale

1. Introduzione da parte del docente sulla congettura di Keplero:

*Abbiamo visto che, secondo Kepler, le gocce d'acqua (**sferiche**) si «impacchettano» il più strettamente possibile, dando origine a configurazioni esagonali. Questo tipo di configurazione rappresenta la disposizione ideale per agglomerare il maggior numero di entità sferiche in uno spazio limitato: proprio come accade per la disposizione della frutta in una cassetta, in cui ogni frutto è disposto in modo da occupare il minor spazio possibile. Nell'affermare ciò, Kepler anticipa la teoria del **close packing**. In questo ambito ricade la celebre congettura di Keplero, che costituisce la parte più famosa e più citata della *Strena*. Qui, infatti, Kepler si pone il problema di quale sia la **disposizione delle sfere** che garantisce un'**occupazione ottimale dello spazio**. Qual è? Andiamo a scoprirlo leggendo direttamente le parole di Kepler.*

2. In piccoli gruppi, lettura guidata del brano rispondendo alle domande e svolgimento delle brevi attività e/o calcoli proposti. Per lo svolgimento dei punti 9. e 10. possono essere utili (ma non strettamente necessarie) 20 palline (da ping-pong o di gomma piuma) per ciascun gruppo di studenti.

3. Momento conclusivo collettivo, in cui si verifica l'effettiva comprensione del brano e si sottolineano gli aspetti seguenti:

*Abbiamo visto che Kepler, facendo inizialmente riferimento all'interno del frutto del **melograno**, nota una connessione tra una disposizione di sfere nello spazio e i solidi rombici: se si comprime una disposizione di piccole sfere in una regione dello spazio, ciascuna **sfera compressa** si trasformerà in un **poliedro rombico**. Individua poi quella che, secondo lui, è la miglior disposizione possibile. Dal punto di vista matematico, tuttavia, non si tratta di una questione semplice: l'affermazione di Kepler dovrà aspettare più di tre secoli e mezzo per essere confermata rigorosamente. La questione dell'impacchettamento più denso delle sfere fa parte del 18° problema di Hilbert, inserito all'interno della lista delle questioni presentate dal matematico tedesco durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi l'8 agosto 1900 (23 problemi che avrebbero avuto una profonda significatività per il progresso della matematica nel XX secolo). La congettura di Keplero è stata dimostrata soltanto nel 1998 da Thomas Hales con l'aiuto del calcolatore (tecnica computer-based) e i dettagli della dimostrazione sono stati pubblicati nel 2006.*

Lettura guidata del brano "Sulla forma dei fiocchi di neve"

Brano tratto da:

Johannes Kepler [1966], *The six-cornered snowflake*, transl. eng. by L. White, Oxford, Clarendon Press, pp. 13-17.

Disponibile online: http://www.iostwitte.nl/M_Galilei/Johannes_kepler_snowflake.pdf

Testo originale in latino

Quae sit *Porro si quis grandius aliquod malum granatum aperiat, videbit*
figura *acinus plerosque in eandem figuram expressos, nisi quantum impedit*
grano mali *series radicum, per quas alimentum illis suum suppeditatur.*
punici.

[...]

*In universum enim duobus modis inter se ordinantur globuli
aequales in vase aliquo collecti, pro duobus modis ordinationis eorum
in aliqua planitie.*

Nam

[...]

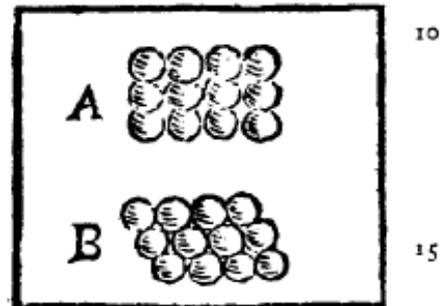


Immagine dell'interno di una melagrana



Nam si errantes in eodem plano horizontali globulos aequales coegeris in angustum, ut se mutuo contingant; aut triangulari forma coeunt, aut quadrangulari; ibi sex unum circumstant, hic quattuor: utrimque eadem est ratio contactus per omnes globulos, demptis extremis. Quinquanguli forma nequit retineri aequalitas, sexangulum 5 resolvitur in triangula: ut ita dicti duo ordines soli sint.

Iam si ad structuram solidorum quam potest fieri arcitissimam progrediaris, ordinesque ordinibus superponas, in plano prius coaptatos, aut ii erunt quadrati A aut trigonici B: si quadrati aut singuli globi ordinis superioris singulis superstabunt ordinis inferioris aut contra singuli ordinis superioris sedebunt inter quaternos ordinis inferioris. Priori modo tangitur quilibet globus a quattuor circumstantibus in eodem plano, ab uno supra se, et ab uno



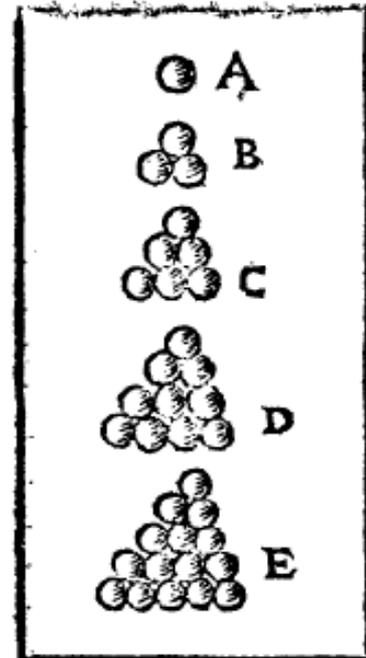
infra se: et sic in universum a sex aliis, eritque ordo cubicus, et compressione facta fiet cubi: sed non erit arcitissima coaptatio. Posteriori modo praeterquam quod quilibet globus a quattuor circumstantibus in eodem plano tangitur etiam a quattuor infra se, et a quattuor supra se, et sic in universum a duodecim tangetur; fietque compressione ex globosis rhombica. Ordo hic magis assimilabitur octaedro et pyramidi. Coaptatio fiet arcitissima, ut nullo praeterea ordine plures globuli in idem vas compingi queant. 25 Rursum si ordines in plano structi fuerint trigonici; tunc in coaptatione solida aut singuli globi ordinis superioris superstant singulis inferioris, coaptatione rursus laxa, aut singuli superioris sedent inter ternos inferioris. Priori modo tangitur quilibet globus a sex circumstantibus in eodem plano, ab uno supra, et ab uno 30 infra se, et sic in universum ab octo aliis. Ordo assimilabitur prismati, et compressione facta fiet pro globulis columnae senum laterum quadrangulorum, duarumque basium sexangularum. Posteriori modo fiet idem, quod prius posteriori modo in qua-



quadrilateris. Esto enim B copula trium globorum. Ei superpone A unum pro apice; esto et alia copula senum globorum C, et alia denum D et alia quindennum E. Impone semper angustio rem latiori, ut fiat figura pyramidis. Etsi igitur per hanc impositionem singuli superiores sederunt inter trinos inferiores:

tamen iam versa figura, ut non apex sed integrum latus pyramidis sit loco superiori, quoties unum globulum degluberis e summis, infra stabunt quattuor ordine quadrato. Et rursus tangetur unus globus ut prius, a duodecim aliis, a sex nempe circumstantibus in eodem plano tribus supra et tribus infra. Ita in solida coaptatione artissima non potest esse ordo triangularis sine quadrangulari, nec vicissim. Patet igitur, acinos punici mali, materiali necessitate concurrente cum rationibus incrementi acinorum, exprimi in figuram rhombici corporis: cum non infestis frontibus pertinaciter nitantur rotundi ex adverso acini, sed cedant expulsi, in spatia inter ternos vel quaternos oppositos interiecta.

Causa
figurae in
acinis mali
punici.



5

10

15

20

Testo originale in inglese

Again, if one opens up a rather large-sized pomegranate, one will see most of its loculi squeezed into the same shape, except in so far as the pattern of veins, by which their nourishment is supplied, gets in the way.

What shape the loculus of a pomegranate has.

[...]

For in general equal pellets when collected in any vessel, come to a mutual arrangement in two modes according to the two modes of arranging them in a plane.

[...]



If equal pellets are loose in the same horizontal plane and you drive them together so tightly that they touch each other, they come together either in a three-cornered or in a four-cornered pattern. In the former case six surround one; in the latter four. Throughout there is the same pattern of contact between all the pellets except the outermost. With a five-sided pattern uniformity cannot be maintained. A six-sided pattern breaks up into three-sided. Thus there are only the two patterns as described.

Now if you proceed to pack the solid bodies as tightly as possible, and set the files that are first arranged on the level on top of others, layer on layer, the pellets will be either squared (A in diagram), or in triangles (B in diagram). If squared, either each single pellet of the upper range will rest on a single pellet of the lower, or, on the other hand, each single pellet of the upper range will settle between every four of the lower. In the former mode any pellet is touched by four neighbours in the same plane, and by one above and one below, and so on throughout, each touched by six others. The arrangement will be cubic, and the pellets, when subjected to pressure, will become cubes. But this will not be the tightest pack. In the second mode not only is every pellet touched by its four neighbours in the same plane, but also by four in the plane above and by four below, and so throughout one will be touched by twelve, and under pressure spherical pellets will become rhomboid. This arrangement will be more comparable to the octahedron and pyramid. The packing will be the tightest possible, so that in no other arrangement could more pellets be stuffed into the same container. Again, if the files built up on the level have been triangular, then in solid packing either each pellet of the upper range rests on one of the lower, when the packing is again loose; or each one of the upper range will settle between every three of the lower. In the first mode any pellet is touched by six neighbours in the same plane, by one above and by one below its level, and thus throughout by eight others. The pattern will be comparable to the prism, and, when pressure is applied, columns of six four-cornered sides and of two six-cornered bases will be formed instead of the pellets. In the second mode the same result will occur as before in the second mode of the four-sided arrangement,



thus: let B be a group of three balls; set one, A , on it as apex; let there be also another group, C , of six balls; another, D , of ten; and another, E , of fifteen. Regularly superimpose the narrower on the wider to produce the shape of a pyramid. Now, although in this construction each one in an upper layer is seated between three in the lower, yet if you turn the figure round so that not the apex but a whole side of the pyramid is uppermost, you will find, whenever you peel off one ball from the top, four lying below it in square pattern. Again as before, one ball will be touched by twelve others, to wit, by six neighbours in the same plane, and by three above and three below. Thus in the closest pack in three dimensions, the triangular pattern cannot exist without the square, and vice versa. It is therefore obvious that the loculi of the pomegranate are squeezed into the shape of a solid rhomboid: the demands of their matter coincide with the proportions of their growth. The globular loculi opposite each other do not persist in pushing face to face, but are displaced and slip aside into the spaces left between three or four others in the confronting plane.

Why the loculi of the pomegranate have their shape.

Traduzione in italiano

Anche in questo caso, se si apre una melagrana di dimensioni piuttosto grandi, si vedrà la maggior parte dei suoi loculi schiacciati nella stessa forma, tranne nella misura in cui lo schema delle vene, da cui traggono nutrimento, è di intralcio.

[...]

In generale, infatti, palline uguali, raccolte in un qualsiasi recipiente, si dispongono reciprocamente in due modi, a seconda dei due modi di disporle in un piano.

[...]

Se palline uguali sono libere nello stesso piano orizzontale e le si spinge insieme così strettamente che si toccano, esse si disporranno o secondo una disposizione triangolare o in una quadrangolare. Nel primo caso sei palline ne circondano una; nel secondo quattro. In ogni caso c'è lo stesso numero di contatti tra tutte le palline, eccetto che per quelle più esterne. Con una disposizione a cinque lati, non si può mantenere l'uniformità. Una disposizione a sei lati si trasforma in una a tre lati.

Dunque, vi sono solo le due configurazioni descritte.

Ora, se si procede a impacchettare i corpi solidi nel modo più stretto possibile e si dispongono quelli disposti per primi su un livello sopra agli altri, strato su strato, le palline saranno disposte o secondo quadrati (A nel diagramma), o secondo triangoli (B nel diagramma). Se si tratta di quadrati, ogni singola pallina dello strato superiore si appoggerà su una singola pallina dello strato inferiore, oppure, al contrario, ogni singola pallina dello strato superiore



si poserà tra ogni quattro dello strato inferiore. Nel primo caso, ogni pallina è toccata da quattro vicine dello stesso piano, da una sopra e da una sotto, e così via, ognuna toccata da altre sei. La disposizione sarà **cubica** e le palline, se sottoposte a pressione, diventeranno cubi. Ma questo non sarà il modo di impacchettare più compatto.

Nella seconda maniera non solo ogni pallina è toccata dalle sue quattro vicine dello stesso strato, ma anche da quattro dello strato superiore e da quattro di quello inferiore, e così in tutto uno sarà toccata da dodici, e sotto pressione le palline sferiche diventeranno romboidali. Questa disposizione sarà più simile all'ottaedro e alla **piramide**. L'impacchettamento sarà il più stretto possibile, così che non potrebbero essere inserite palline ulteriori nello stesso contenitore.

Ancora, se la disposizione delle palline di un livello fosse stata triangolare, nell'impacchettamento solido o ogni pallina dello strato superiore si appoggia su una di quelle inferiori, quando l'impacchettamento è di nuovo allentato; oppure ogni pallina dello strato superiore si sistemerà tra ogni tre di quelle inferiori. Nel primo caso, ogni pallina è toccata da sei vicine dello stesso strato, da una sopra e da una sotto il suo strato, e quindi in tutto da altre otto. Il disegno sarà paragonabile al prisma e, quando si applica la pressione, si formeranno, al posto delle palline, delle colonne fatte da sei lati quadrati e da due basi esagonali.

Nel secondo caso si otterrà lo stesso risultato di prima nella seconda modalità della disposizione quadrata, quindi: sia B un gruppo di tre palline; su di esso sia posta una, A, come vertice; supponiamo anche un altro gruppo, C, di sei palline; un altro, D, di dieci; e un altro, E, di quindici. Si sovrapponga regolarmente lo strato più stretto a quello più largo per ottenere la forma di una piramide. Ora, sebbene in questa costruzione ogni pallina di uno strato superiore sia posta tra tre di quelle inferiori, se si gira la figura in modo che non sia il vertice ma un intero lato della piramide ad essere in alto, si troveranno, ogni volta che si toglie una pallina dalla cima, quattro che giacciono sotto di essa in una disposizione quadrata. Di nuovo, come prima, una pallina sarà toccata da altre dodici, cioè da sei vicine sullo stesso piano, da tre sopra e da tre sotto.

Così, nell'impacchettamento più compatto in tre dimensioni, la disposizione triangolare non può esistere senza quella quadrata, e viceversa.

È quindi ovvio che i loculi del melograno sono compressi nella forma di un solido romboidale: le esigenze della loro materia coincidono con le proporzioni della loro crescita. I loculi globulari opposti non persistono nel premere faccia a faccia, ma si spostano e scivolano nei vuoti lasciati tra tre o quattro altri nel piano opposto.

Domande & attività

1. Per introdurre la questione dell'impacchettamento ottimale, Kepler parte dalla natura. A cosa fa riferimento all'inizio del brano proposto? _____

2. Qual è il parallelismo portato avanti da Kepler a partire dalla frase: "In generale, infatti, palline uguali, raccolte in un qualsiasi recipiente, si dispongono reciprocamente in due modi, a seconda dei due modi di disporle in un piano"? Per spiegarlo, Kepler si aiuta con un'illustrazione: rintracciala all'interno del testo originale e commentala dal punto di vista matematico: quale caratteristiche si notano? _____

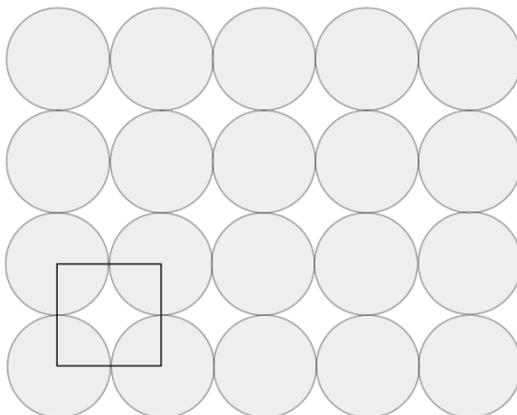
3. In che modo Kepler esclude la possibilità che vi siano altre configurazioni oltre a quelle "triangolare" e "quadrata" da lui individuate? _____

4. Kepler getta le basi di quella che, modernamente, è la teoria del **close packaging**, ovvero dell'impacchettamento "più stretto", nel senso di "più denso". La questione consiste nel considerare configurazioni diverse di sfere uguali (le "palline" citate da Kepler) nello spazio e, in ciascun caso, calcolare la densità dell'impacchettamento, ovvero la frazione del volume totale che è occupato dalle sfere. Indichiamo con ρ_n la densità di un impacchettamento di sfere in dimensione n . In generale, quindi, essa può essere calcolata tramite il rapporto:

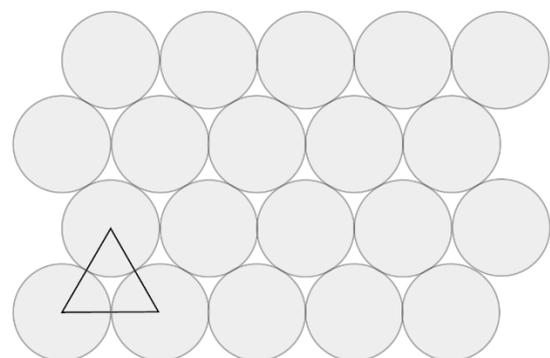
$$\rho_n = \frac{\text{volume occupato}}{\text{volume}}$$

Naturalmente tale densità dipenderà dalla forma della regione. Per evitare problemi, si considerano regioni molto grandi, in modo da rendere trascurabile l'effetto della frontiera.

5. Prima di procedere con la l'analisi del testo, analizziamo le due configurazioni presentate da Kepler per il caso bidimensionale, schematizzate nella seguente figura.



(a)



(b)

Immagine tratta dal sito web <https://blog.kleinproject.org/?p=1943&lang=it>



Guardando l'immagine, quale delle due configurazioni ti sembra "migliore", ossia presenta una densità maggiore? _____

Proviamo a calcolare le due densità ρ_2 degli impacchettamenti presentati, per verificare la validità della nostra intuizione visiva.

Nel caso **(a)** ρ_2 sarà data dal rapporto tra l' _____ di 4 settori circolari aventi un l'angolo pari a 90° e l'area di un _____ avente lato pari al doppio del raggio dei settori. Indichiamo con r tale raggio.

L'area dei quattro settori circolari in figura è pari a quella di un cerchio di raggio r , ovvero

$$A_{\text{cerchio}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Il quadrato ha lato pari a $2r$, per cui la sua area sarà

$$A_{\text{quadrato}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Possiamo quindi ricavare ρ_2 , facendo il rapporto tra le due aree appena trovate.

$$\rho_2 = \underline{\hspace{2cm}} \approx 0,785398 \dots$$

Procediamo in maniera analoga nel caso **(b)**. La densità ρ_2 sarà data dal rapporto tra l' _____ di 3 settori circolari aventi un l'angolo pari a 60° e l'area di un _____ di lato pari al doppio del raggio dei settori. Indicando nuovamente con r tale raggio, l'area dei tre settori circolari in figura è pari a quella di un semicerchio di raggio r (perché $60^\circ \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$), ovvero

$$A_{\text{semicerchio}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Il triangolo equilatero ha lato pari a $2r$. La sua altezza, allora, è pari a

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Di conseguenza, l'area del triangolo vale

$$A_{\text{triangolo}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Possiamo quindi ricavare ρ_2 , facendo il rapporto tra le due aree appena trovate.

$$\rho_2 = \underline{\hspace{2cm}} \approx 0,9069 \dots$$

Cosa possiamo concludere in base ai risultati ottenuti?

6. Occorre notare che non abbiamo dimostrato che la seconda configurazione è, in assoluto, quella ottimale. Perché? _____

Per il momento, infatti, abbiamo solo dimostrato che la **(b)** è una configurazione più densa della **(a)**. Il fatto che ogni altro impacchettamento periodico bidimensionale è meno denso di **(b)** è stato dimostrato dal matematico norvegese Axel Thue nel 1890.¹

¹ Una traccia di tale dimostrazione in italiano è reperibile al link: <https://blog.kleinproject.org/?p=1943&lang=it>



Egli infatti ha mostrato che, dividendo il piano in regioni locali, in tutte le regioni la densità è minore o uguale a $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

7. Passando allo spazio tridimensionale, quali sono le caratteristiche dell'impacchettamento cubico, secondo Keplero? _____

8. Qual è, secondo Kepler, "l'impacchettamento [...] più stretto possibile" nello spazio? In che modo si disporranno, in tal caso, le sfere? E che forma tenderanno ad assumere se sottoposte a pressione? _____

Sottolinea nel testo le parole che costituiscono la vera e propria congettura di Keplero.

9. Kepler individua poi due possibilità per la stratificazione delle sfere nello spazio tridimensionale, ciascuna delle quali viene associata a un poliedro. Come sono fatte queste configurazioni? A quale solido geometrico sono legate? Prova a rappresentare queste due situazioni con un disegno oppure riproducibile materialmente utilizzando delle piccole palline (es. palline da ping-pong o palline di gomma piuma). _____

10. Soffermiamoci ora sulla configurazione che Kepler considera ottimale, ovvero quella romboidale. Prova a riprodurre (tramite disegno o utilizzando le palline a tua disposizione) la stratificazione illustrata da Kepler per formare una piramide utilizzando i gruppi di sfere A, B, C e D da lui citati. Aiutandoti eventualmente con la costruzione realizzata, spiega cosa vuol dire Kepler quando afferma che "nell'impacchettamento più compatto in tre dimensioni, la disposizione triangolare non può esistere senza quella quadrata, e viceversa".

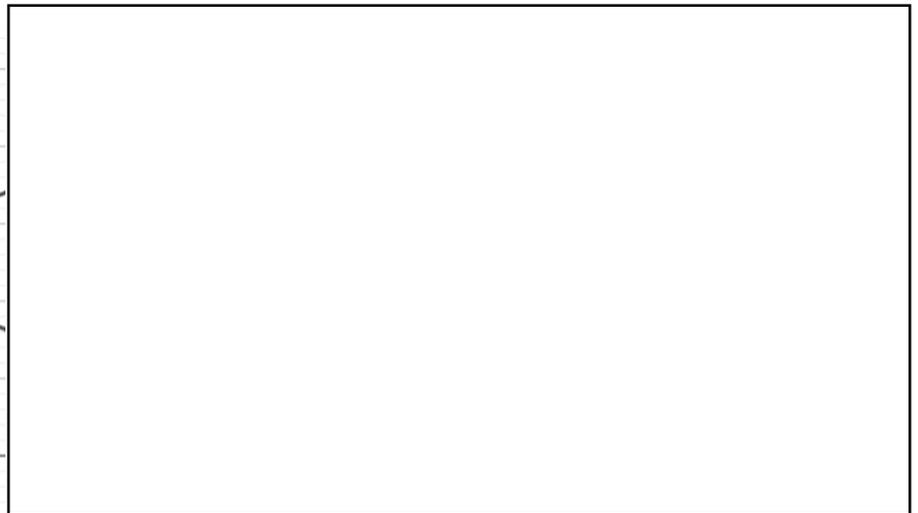
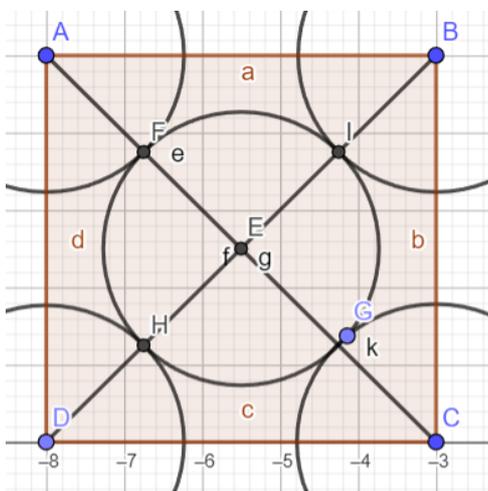
11. Questo tipo di impacchettamento – che, come notato da Kepler, è quello che si osserva per la disposizione dei frutti tondeggianti al mercato – è detto **reticolo cubico a facce centrate**. Secondo Kepler, da quante sfere in tutto deve essere "toccata" una sfera? _____

In termini moderni, è stato dimostrato che, se vogliamo circondare una sfera con sfere tangenti della stessa dimensione, possiamo posizionare al massimo 12 sfere. In questo caso però, al contrario di quanto accade nel piano, c'è ancora spazio attorno alla sfera di partenza. Possiamo provare a muoverci attorno alle 12 sfere tangenti e vedere se possiamo collocare

una tredicesima sfera. Thomas Hales, nel 1998, ha dimostrato che ciò non è possibile. Inoltre, a differenza del caso piano, esistono diversi modi non equivalenti per posizionare le 12 sfere tangenti.

12. Vogliamo quindi studiare la geometria dell'impacchettamento ottimale delle sfere nello spazio tridimensionale. In questa configurazione, i centri delle sfere sono posizionati ai vertici del reticolo cubico a facce centrate, come correttamente "intuito" e congetturato da Kepler. Immaginiamo una tassellazione dello spazio tridimensionale composta da cubi di spigolo a . Per ciascun cubo, immaginiamo di posizionare una sfera centrata in ciascuno degli otto vertici e una sfera centrata al centro di ciascuna delle sei facce. Prendiamo il raggio r delle sfere il più grande possibile, in modo tale che le sfere non si intersechino. Considerando una faccia del cubo (vedi figura), dimostra che

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$



Possiamo allora calcolare la densità dell'impacchettamento come rapporto tra la somma dei volumi delle parti di sfere contenute nel nostro cubo e il volume di quest'ultimo. Scrivendo a in funzione di r , si ha che

$$V_{cubo} = a^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bisogna ora capire quanti "volumi di sfere complete" sono contenuti nel nostro cubo.

- Per ogni sfera centrata in un vertice del cubo, un ottavo di una sfera giace all'interno del cubo. Poiché ci sono otto vertici, queste parti equivalgono al volume di una sfera.
- Per ciascuna sfera centrata nel centro di una faccia del cubo, metà di essa giace all'interno del cubo. Poiché vi sono sei facce, abbiamo il volume di tre sfere.

In tutto, dunque, abbiamo un volume pari a quello di _____ sfere di raggio r .

Il volume di ciascuna sfera è

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Quindi, la densità dell'impacchettamento cercata è data dal rapporto tra il volume di quattro sfere e il volume del cubo.

$$\rho_3 = \underline{\hspace{2cm}} \approx 0,7405 \dots$$



Osservazione per i docenti. Non è affatto “immediato” osservare che l’impacchettamento usuale dei frutti tondeggianti (come le arance in figura) corrisponde ad un reticolo cubico a facce centrate. Infatti, dovremmo avere delle rette perpendicolari di centri allineati di sfere. Queste linee, in realtà, esistono nell’impacchettamento usuale delle arance, ma nessuna di esse giace nei piani orizzontali. Infatti, il piano passante per i centri delle sfere che costituiscono uno strato corrispondente a quello della figura **(b)** è un piano inclinato che attraversa i centri delle tre facce adiacenti a un vertice del cubo. Nella figura **(c)** è rappresentato l’impacchettamento di quattro livelli del tipo **(b)** uno sopra all’altro. Le due rette che attraversano i centri delle sfere sono ortogonali.²

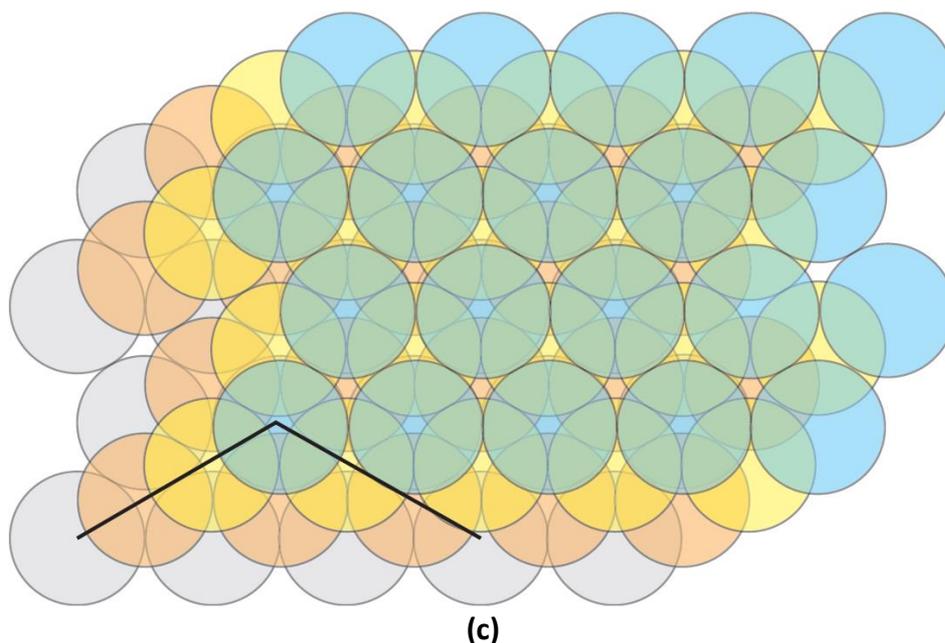


Immagine tratta dal sito web <https://blog.kleinproject.org/?p=1943&lang=it>

² Per ulteriori spiegazioni e approfondimenti, cfr. <https://blog.kleinproject.org/?p=1943&lang=it> (in italiano) e <https://www.ams.org/notices/200004/fea-hales.pdf> (in inglese).